EXAMEN DE ÁREA DE ANÁLISIS

15 de junio de 2010

Ejercicio I Contestar a las tres siguientes preguntas de manera breve pero justificada.

1. ¿ La intersección de conjuntos conexos es conexa?
2. Mostrar que la unión finita de conjuntos compactos es compacto.
3. Sea $f_n : [0,\,1] \to [0,\infty)$ una sucesión de funciones continuas con $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \to 0$ para todo $x \in [0,\,1]$. Se define la función

$$\phi : [0,\,1] \to [0,\infty], \quad \phi(x) := \sup\{f_n(x)\ :\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Mostrar que si ϕ es Lebesgue-integrable, entonces $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n\ dx = 0$.

Ejercicio II Sean (X, d) un espacio métrico y $f_n : X \to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$, una secuencia de funciones acotadas que converge uniformemente. Mostrar que existe un $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio III Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Se dice que f es *propia*, si $f^{-1}(K)$ es compacto para cada subconjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$. Se dice que f es *cerrada*, si $f(A)$ es cerrada para cada subconjunto cerrado $A \subset \mathbb{R}^n$. Para una función continua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mostrar que:

1. si f es propia, entonces es cerrada.
2. f es propia si y solo si $\lim_{\|x\|\to\infty} \|f(x)\| = \infty$.

Ejercicio IV Sin usar el teorema de Hahn-Banach probar que si M es un subespacio de un espacio de Hilbert H y $g \in M'$ (M' es el dual de M) entonces existe una única $f \in H'$ tal que g sea la restricción de f a M y $\|f\| = \|g\|$.

Ejercicio V Sea $\mathfrak{M} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ y μ la medida de conteo en $(\mathbb{N}, \mathfrak{M})$, es decir,

$$\mu : \mathfrak{M} \to [0, \infty], \quad \mu(A) := \begin{cases} \operatorname{card}(A), & \text{si } A \text{ es finito}, \\ \infty, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

1. Mostrar que $(\mathbb{N}, \mathfrak{M}, \mu)$ es un espacio de medida y hallar todas las funciones medibles $\mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$.
2. Verificar si las siguentes funciones son medibles y integrables:

$$f : \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}},\ f(x) = \exp(-x) \qquad \text{y} \qquad g : \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}},\ g(x) = (-1)^x.$$

En el caso de la integrabilidad, encontrar la integral.

Ejercicio VI

1. Mostrar que existe una vecindad V de $(0,0)$ en $\mathbb{R}^2$ y una función $\phi : V \to \mathbb{R}$ tal que

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$$

equivale a $z = \phi(x, y)$ para (x, y, z) variando alrededor del punto $P(0, 0, 1)$.

2. Escribir la fórmula de Taylor de primer orden de la función ϕ alrededor del punto $(0, 0)$. (No es necesario escribir el resto de manera explícita)