EXAMEN DE ÁREA: ANÁLISIS

Escoja seis (6) de los siguiente ocho (8) problemas.

1. Sea (f_n) una sucesión de funciones continuamente diferenciables del intervalo $I = [0, 1]$ en $\mathbb{R}$ tal que
(a) $f_n \leq f_{n+1}$,
(b) Existe una constante $c > 0$ tal que $\int_0^1 |f_n'(t)|\, dt < c$ para todo n.

Muestre que o bien $f_n(x) \to \infty$ para todo $x \in I$, o bien (f_n) converge hacia una función continua.

2. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un subconjunto abierto del plano que contenga el disco cerrado unitario D. Sea $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación de clase C^∞ dada por

$$\varphi(x, y) = (f(x, y), g(x, y)), \quad (x, y) \in U$$

tal que para todo $(x, y) \in U$, $(f(x, y))^2 + (g(x, y))^2 = 1$.

a. Mostrar que $\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x} = 0$.

b. Si T es el borde de D, calcular

$$\int_T f\, dg - g\, df.$$

c. Mostrar que no existe ninguna función φ con las propiedades descritas anteriormente tal que $\varphi|_T =$ identidad.

3. Mostrar que si f es integrable según Lebesgue en un intervalo $[a, b]$, entonces $\int_A |f|\, dm \to 0$ cuando $m(A) \to 0$ (aquí m representa la medida de Lebesgue). Más precisamente, muestre que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $m(A) < \delta$ entonces $\int_A |f|\, dm < \epsilon$.
Sugerencia: Considere la sucesión (f_n) dada por

$$\begin{cases} f_n(x) = f(x), & \text{si} \quad |f(x)| < n \\ f_n(x) = n, & \text{si} \quad |f(x)| \geq n \end{cases}$$

y aplique el Teorema de la Convergencia Monótona.

4.
a. Muestre que la integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^2 + a^2)}\, dx$$

es convergente.

b. Muestre por el método de los residuos que si $a > 0$ entonces

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x\left(x^2+a^2\right)}\,dx = \frac{\pi}{2a^2}\left(1-e^{-a}\right).$$

Justifique completamente su respuesta.

5. Sea $U \subset \mathbb{R}^m$ un abierto convexo, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable y c una constante positiva. Demostrar que las condiciones siguientes son equivalentes:
(a) $\|Df(x)\| \leq c$, para todo $x \in U$,
(b) $\|f(x) - f(y)\| \leq c\,\|x-y\|$, para cualesquiera $x, y \in U$.

6. En un espacio de Hilbert H sea (U_n) una sucesión de operadores unitarios débilmente convergente hacia un operador unitario U. Demostrar que entonces la sucesión (U_n) también converge fuertemente hacia U.

7 Suponga que $a_n > 0$, $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, y $\sum a_n$ diverge.

a Muestre que $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ diverge.

b. Muestre que

$$\frac{a_{N+1}}{s_{N+1}} + \cdots + \frac{a_{N+k}}{s_{N+k}} \geq 1 - \frac{s_N}{s_{N+k}}$$

y deduzca que $\sum \frac{a_n}{s_n}$ diverge.

c. Muestre que

$$\frac{a_n}{s_n^2} \leq \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}$$

y deduzca que $\sum \frac{a_n}{s_n^2}$ converge.

8. Sea (λ_n) una sucesión discreta cualquiera de números reales.

a. Muestre que la función f definida por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\lambda_n x}}{n^2} \quad \left(i = \sqrt{-1}\right)$$

es continua.

b. Muestre que el límite

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\,dx$$

existe.