Examen de Área de Análisis

05 diciembre 2008

1. El objetivo de este ejercicio es generalizar el teorema de las series alternantes.

   Sean $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ dos sucesiones reales que satisfacen la condiciones
   (i) existe $M > 0$ tal que $|a_0 + a_1 + \cdots + a_n| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$
   (ii) la sucesión b_n es de términos no negativos y decrece a cero.

   (a) Mostrar que la serie
   $$a_0b_0 + a_1b_1 + \cdots + a_nb_n + \cdots$$
   es convergente.

   (b) Estudiar la convergencia de la serie
   $$\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} + \cdots$$

2. (a) Mostrar que para todo (x, y) reales existe un único $z = f(x, y)$ solución de la ecuación
   $$z^3 + (x^2 + y^2)z + 1 = 0$$

   (b) Mostrar que la función f es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$

3. Sea $f : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ el vector grad$f$ en x es ortogonal a x. Mostrar que f posee un vaor máximo. [Sugerencia: averiguar si f depende de $|x|$]

4. Sean $E = C([a,\ b])$ dotado de la norma $\|f\| = \max_{a\leq x\leq b} |f(x)|$ y $k : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Para $x \in E$ definimos la función $L(x)$ por
   $$L(x)(s) = \int_a^b k(s,t)x(t)\ dt \qquad \text{para } a \leq s \leq\ b$$

   (a) Mostrar que L es un operador lineal continuo de E en E.

   (b) Dada una función y continua sobre $[a, b]$, probar que la ecuación
   $$y(s) = x(s) - \int_0^{\pi/4} \text{sen }(st)x(t)dt$$
   tiene una y solo una solución x en E

5. Sean $Q = [0,\ 1] \times [0,\ 1]$ y $f : Q \to \mathbb{R}$ una función acotada tal que para todo $t \in [0,\ 1]$ la función $x \to f(x, t)$ es Lebesgue-medible en $[0,\ 1]$, la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial t}$ existe en todo punto $(x, t) \in Q$ y $\frac{\partial f}{\partial t}$ es acotada en Q.

   Mostrar que
   $$\frac{d}{dt}\left[\int_0^1 f(x,t)\ dx\right]\Bigg|_{t=t_0} = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)\ dx$$