UNIVERSIDAD DE LOS ANDES - DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
EXAMEN AVANZADO DE ANALISIS
1 Semestre de de 2008

1 Considere el operador A en $L_p(0,\infty)$, $p>1$, $f(t)\geq 0$: $Af(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

Pruebe que A es acotado, pero no compacto.

Sugerencia: integre por partes en $\frac{-1}{p-1}\int (xAf(x))^p \frac{d}{dx}\left(x^{1-p}\right)dx$

2 Sean $1<p<\infty$, $x_n \in L_p(0,1)$, $x\in L_p(0,1)$.

i) (80%) Pruebe que $x_n \Rightarrow x$ (fuertemente) sí y sólo sí

a) $x_n \to x$ (débilmente) y b) $\|x_n\|\to\|x\|$.

Suponga que existe C>0 tal que para $1<p\leq 2$ para todo $u\in R$ se cumple

$|1+u|^p \geq 1+pu+C\theta(u)$, donde $\theta(u)=\begin{cases}|u|^2 & , \text{ si } |u|<1\\ |u|^p & , \text{ si } |u|\geq 1\end{cases}$.

Para $p>2$ pruebe $|1+u|^p \geq 1+pu+c|u|^p$.

Luego, escriba estas desigualdades con $u=\frac{x_n(t)-x(t)}{x(t)}$, multiplique por $|x(t)|^p$ e integre.

ii) (20%) Demuestre las desigualdades en "i)".

3 Considere el sistema de funciones $e_n(x)=\exp\{2\pi inx\}, n\in Z$, en el espacio $L_2(a,b)$.

Pruebe que el complemento ortogonal

al sistema $\{e_n\}$ es $\begin{cases}\text{cero, si } |b-a|\leq 1\\ \text{distinto de cero, si } |b-a|>1\end{cases}$

4 Sean : H - un espacio de Hilbert y U – un operador lineal auto-adjunto en H .

Pruebe que la condición necesaria y suficiente para que la serie

$$I+U+U^2+U^3+...+U^n+...$$

sea convergente es $\|U\|<1$.

TIEMPO : cuatro horas .