Ejercicios para Examen de álgebra

Teoría de grupos

Sean H y K subgrupos finitos de un grupo G, y sea $a \in G$. Demuestra la fórmula de conteo para la coclase doble HaK:

$$|HaK| = \frac{|H||K|}{|H \cap aKa^{-1}|}.$$

Utilice para ello la acción del $H \times K$ sobre el conjunto G, dada por $(h, k) \cdot a = hak^{-1}$.

Teoría de representaciones de grupos finitos

Calcule la tabla de caracteres de $D_4 = \langle r, s \mid r^4 = s^2 = e, sr = r^{-1}s \rangle$, el grupo diedral de orden 8 (simetrías del cuadrado).

Teoría de Galois

Sea E/F una extensión de Galois con grupo $G = \mathrm{Gal}(E/F)$, y sea $L = E^H$ el campo fijo de un subgrupo $H \leq G$. Demuestra que el grupo de automorfismos de L sobre F es isomorfo a $N_G(H)/H$, donde $N_G(H)$ es el normalizador de H en G.

$$\mathrm{Aut}_F(L) \cong N_G(H)/H$$

Sugerencia: Utilizar el Teorema Fundamental de la Teoría de Galois.

Álgebra Conmutativa

Sea R un anillo conmutativo (con unidad) y sea M un R-módulo. El conjunto de **ideales primos asociados** de M, denotado $\mathrm{Ass}(M)$, se define como:

$$\mathrm{Ass}(M) = \{P \in \mathrm{Spec}(R) \mid \exists m \in M \setminus \{0\} \text{ tal que } P = \mathrm{Ann}(m)\}$$

donde $\mathrm{Spec}(R)$ es el conjunto de ideales primos de R, y $\mathrm{Ann}(m) = \{r \in R \mid rm = 0\}$ es el ideal anulador de m.

Demuestre que si M es un R-módulo Artiniano (es decir, satisface la condición de la cadena descendente para submódulos), entonces todo ideal primo asociado $P \in \mathrm{Ass}(M)$ es un ideal maximal de R.

Álgebra Lineal

Resuelva los siguientes dos incisos:

(a) Sea M una matriz de tamaño $p \times p$ con entradas en $\mathbb{C}$, donde p es un entero impar. Si M es antisimétrica (es decir, $M^T = -M$), demuestre que $\det(M) = 0$.

(b) Sea n un entero positivo par y sea $A = (a_{ij})_{n \times n} \in M_n(\mathbb{C})$ una matriz antisimétrica ($A^T = -A$). Para un número complejo fijo c, definimos $b_{ij} := a_{ij} + c$ para $1 \leq i, j \leq n$, y sea $B := (b_{ij})_{n \times n} \in M_n(\mathbb{C})$. Demuestre que $\det(A) = \det(B)$.

Ayuda para (b): Considere la siguiente matriz M de tamaño $(n+1) \times (n+1)$, notando que $n+1$ es impar:

$$M = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline -c & & & \\ \vdots & & B & \\ -c & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline -c & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -c & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right)$$