EXAMEN DE ÁREA ÁLGEBRA 2024-II

1. Sea $V = \mathbb{R}^3$ y sea W el subespacio de V dado por $W : x_1 + x_2 + x_3 = 0$.
   (a) Sea $W^0 := \{f \in V^* \ : \ f(w) = 0, \forall w \in W\}$. Provea un ejemplo de un elemento no nulo en W^0.
   (b) Pruebe que $W^0 \cong (V/W)^*$, estableciendo un isomorfismo de espacios vectoriales.
2. Sea G un grupo y sea $H \leq G$ tal que $x^2 \in H$ para todo $x \in G$. Pruebe que $H \trianglelefteq G$ y que G/H es abeliano.
3. Sea K el c.d.d. de $p(x) = x^6 - 5 \in \mathbb{Q}[x]$.
   (a) Determine el grupo de Galois G de K sobre $\mathbb{Q}$.
   (b) Use la correspondencia de Galois para describir los subgrupos de G, y los subcuerpos E donde $K/E/\mathbb{Q}$.
4. Sea R un anillo conmutativo y sean I, J ideales de R. Construya un isomorfismo R-lineal entre $R/I \otimes_R R/J$ y $R/(I + J)$.
5. Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo y $R = M_n(\mathbb{F})$ el anillo de matrices $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{F}$. Se sabe que cada R-módulo simple es isomorfo al módulo tautologico $V = \mathbb{F}^n$ de vectores columnas (no tiene que mostrar esto). Sea $\phi : R \to R$ un automorfismo de $\mathbb{F}$-algebras. Muestre que ϕ es interno, es decir, existe una matriz invertible B tal que $\phi(r) = BrB^{-1}$ para todol $r \in R$. [*Ayuda*: Considere el R-módulo V^ϕ dado por V, como grupo aditivo, pero con la acción de R dada por $r * v := \phi(r)v$ para $v \in V$, $r \in R$.]