Examen de Conocimiento de Álgebra, 2024-1

17 de mayo de 2024

1. (a) Sea $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$ el producto interno estándar en $\mathbb{R}^n$. Sea M una matriz real de $n \times n$. Demuestre que $M^t M = I$ si y solo si para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\langle Mx, My \rangle = \langle x, y \rangle$.

   (b) Demuestre que una matriz M real de 2×2 cumple $M^t M = I$ si y solo si existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ o $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$.

2. Clasifique todos los grupos de orden 21.

3. Sea F el campo de descomposición de $x^3 - 7$ sobre $\mathbb{Q}$ y G el grupo de Galois de $F/\mathbb{Q}$.

   (a) Demuestre que G es isomorfo a $\mathbb{S}_3$.

   (b) Exhiba los campos entre $\mathbb{Q}$ y F.

   (c) ¿Cuáles de los campos entre $\mathbb{Q}$ y F son normales sobre $\mathbb{Q}$?

4. Sea A un *anillo booleano*: es decir, A es un anillo conmutativo con 1 tal que para todo $x \in A$, $x^2 = x$.

   (a) Demuestre que para todo $x \in A$, $2x = 0$.

   (b) Sea P un ideal primo en A. Demuestre que A/P es isomorfo a $\mathbb{F}_2$, el cuerpo de dos elementos.

   (c) Demuestre que para todo $x, y \in A$, se cumple $(x, y) = (x + y + xy)$. Concluya que todo ideal finitamente generado es principal.

   (d) Dé un ejemplo de un anillos booleanos finito y un ejemplo de un anillo booleano infinito.

5. Considere $\mathbf{F}_q$ el campo finito con q elementos, donde q es un número primo impar. Definimos el grupo afín $\mathrm{Aff}(\mathbf{F}_q)$ como:

$$\mathrm{Aff}(\mathbf{F}_q) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbf{F}_q^*, b \in \mathbf{F}_q \right\},$$

   donde $\mathbf{F}_q^*$ denota los elementos no cero de $\mathbf{F}_q$.

   Sea V el espacio vectorial complejo de funciones $f : \mathbf{F}_q \to \mathbb{C}$.

   (a) Demuestre que el grupo afín $\mathrm{Aff}(\mathbf{F}_q)$ actúa en V mediante la operación:

$$(\rho_V(g)f)(x) = f(g^{-1}x),$$

   donde g es un elemento de $\mathrm{Aff}(\mathbf{F}_q)$, f es una función en V, y x es un elemento de $\mathbf{F}_q$.

   (b) Encuentre la descomposición de V en representaciones irreducibles de $\mathrm{Aff}(\mathbf{F}_q)$.

   Pista: Considere el espacio de las funciones constantes en $\mathbf{F}_q$ y su complemento en V.