Examen de algebra

May 25, 2023

1. Sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal y $W \leq V$ un subespacio invariante bajo T. Denotemos por $T|_W\colon W \to W$ a la restricción de T, y definamos $\overline{T} : V/W \to V/W : \overline{x} \mapsto \overline{T(x)}$, donde $\overline{v} = v + W$ representa la clase en V/W de un vector $v \in V$.

   (a) Pruebe que $\overline{T}$ está bien definida y que es lineal.

   (b) Sean $f(t), g(t)$ y $h(t)$ los polinomios característicos de $T, T|_W$ y $\overline{T}$, respectivamente. Pruebe que $f(t) = g(t)h(t)$.

2. Sea G un grupo y $H \leq G$ un subgrupo. Decimos the H es *característico en* G si $\sigma(H) = H$ para todo automorfismo $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$. En este caso escribimos H car G.

   (a) Pruebe que si $K \trianglelefteq G$ y H car K, entonces $H \trianglelefteq G$.

   (b) Si $K \trianglelefteq G$ y $H \trianglelefteq K$, ¿se puede concluir que $H \trianglelefteq G$? Justifique.

   (c) Si G es finito y P es el único p-subgrupo de Sylow de G, para algún primo p, pruebe que P car G.

3. Demuestre que un anillo local no contiene idempotentes distintos de 0 y 1.

4. Sea m un entero no negativo y p un número primo. Encuentre el campo de ruptura (splitting field) de $X^m - 1 \in \mathbb{F}_p[X]$.

5. Sea G un grupo finito y X un conjunto finito no vacío sobre el cual G actúa. La representación por permutaciones asociada $L_X : G \to GL(\mathbb{C}[X])$ se define como sigue: para cada $g \in G$ y $x \in X$, $L_X(g)(v_x) = v_{gx}$, donde $\mathbb{C}[X]$ es un espacio vectorial complejo con base $\{v_x : x \in X\}$.

   Calcule el caracter de L_X y encuentre una condición necesaria y suficiente para la simplicidad de L_X.