# Examen de área en Álgebra (2019-1)

1. Sea $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ el grupo de matrices $2 \times 2$ con entradas enteras y determinante igual a uno. Puede asumir que $\Gamma$ es generado por dos matrices $S$ y $T$, dadas por

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   (a) Muestre que $\Gamma$ es generado por dos elementos cuyos órdenes son 4 y 6.

   (b) Muestre que la imágen de cualquier homomorfismo $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$ es un subgrupo de las raíces 12-avas de la unidad.

   (c) Sea $p$ un primo y considere el grupo $SL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ de matrices $2 \times 2$ cuyas entradas son elementos del campo finito $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Sea

$$\phi_p : \Gamma \to SL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

   la función que reduce cada entrada módulo $p$. Muestre que $\phi_p$ es un homomorfismo *sobreyectivo*.

2. Sea $G$ un grupo de orden $|G| = 24$. Muestre que $G$ tiene un subgrupo normal $N$ tal que $|N| = 4$ o $|N| = 8$. (*Pista:* Sea $P$ el subgrupo 2-Sylow de $G$, y considere la acción de $G$ sobre las clases laterales izquierdas $G/P$ de $P$ en $G$: $aP \mapsto gaP$ para todo $aP \in G/P$ y $g \in G$.)

3. Sea $R$ un anillo local noetheriano con ideal maximal $\mathfrak{m}$. Demuestre las siguientes afirmaciones:

   *a*) Sea $M$ un $R$-módulo finitamente generado. Demuestre que $M/\mathfrak{m}M = 0$ si y sólo si $M = 0$.

   *b*) Suponga que $M$ y $N$ son $R$-módulos finitamente generados y sea $\phi : M \to N$ un $R$-módulo. Demuestre que si el mapa inducido $\phi_{\mathfrak{m}} : M/\mathfrak{m}M \to N/\mathfrak{m}N$ es sobreyectivo entonces $\phi$ es sobreyectivo.

4. Sea $k$ un campo y sea $R = k[x_1, \ldots, x_n]$. Recuerde que un orden monomial en $R$ es un orden total $\preceq$ en los monomios de $R$ que satisface:

   - $x^\alpha \preceq x^\beta \implies x^{\alpha+\gamma} \preceq x^{\beta+\gamma}$ para todos $\alpha, \beta, \gamma$ vectores de exponentes en $\mathbb{N}^n$
   - $\preceq$ es un buen orden.

   Si $0 \neq g \in R$ defina el monomio inicial de $g$, denotado $in_\preceq(g)$, como el monomio más grande (en el orden $\preceq$) entre los que aparecen con coeficiente diferente de cero en $g$. Si $I \subseteq R$ es un ideal defina el $\preceq$-ideal inicial como

$$in_\preceq(I) = (\{in_\preceq(g) : g \in I\}).$$

   Demuestre las siguientes afirmaciones:

   *a*) Suponga que $I$ y $J$ son ideales de $R$ con $I \subseteq J$. Demuestre que $in_\preceq(I) = in_\preceq(J)$ implica $I = J$.

   *b*) Demuestre que todo ideal generado por monomios en $R$ es generado por un número finito de monomios (equivalentemente que toda cadena ascendente de ideales de monomios es estacionaria despues de finitos pasos).

   *c*) Use (*a*) y (*b*) para demostrar que el anillo $R$ es noetheriano.

5. (Campos de ruptura)

   *a*) Sea $K \supseteq F$ una extension de campos y sea $f(x) \in F[x]$. Defina de manera precisa la expresión "$K$ es un campo de ruptura (splitting field) para $f(x)$ sobre $F$"

   *b*) Sean $K_1, K_2, F$ campos con $K_1 \supseteq F \subseteq K_2$. Si $K_1$ y $K_2$ son campos de ruptura para $f(x)$ sobre $F$ demuestre que existe un isomorfismo entre $K_1$ y $K_2$ que fija a $F$ (i.e. uno que extiende a la identidad en $F$).

6. Sea $G = S_3$ el grupo simétrico en 3 elementos.

   (a) Muestre que la acción natural de $G$ sobre los vertices de un triángulo equilátero en el plano induce una representación irreducible $\rho : G \to GL_2(\mathbb{C})$. (Tiene que mostrar que la representación es irreducible.)

   (b) Sea $\pi : G \to GL_3(\mathbb{C})$ la representation por permutación obvia: si $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{C}^3$, definimos $\pi(g)(v) = (v_{g(1)}, v_{g(2)}, v_{g(3)})$. Muestre que $\pi = \mathbf{1} \oplus \rho$, donde $\mathbf{1}$ es la representación trivial.