EXAMEN DE ÁREA EN ÁLGEBRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS – UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

Responda cinco de las siguientes preguntas:

1. Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión n y sea $\mathcal{L}(V)$ el espacio de transformaciones lineales de V en V . Defina el mapa

$$c: \mathcal{L}(V) \otimes \mathcal{L}(V) \rightarrow \mathcal{L}(V)$$

cuya imagen en un tensor puro $S \otimes T$ es $c(S \otimes T) := S \circ T$.

- (a) Pruebe que c es lineal.
 - (b) Calcule la nulidad de c .
-

2. Sea G un grupo de orden $165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$.
- (a) Muestre que G tiene un subgrupo normal N de orden 11.
 - (b) Muestre que G/N es conmutativo, y por tanto, G es soluble.
 - (c) Clasifique todos los grupos de orden 165, salvo isomorfismo.
-

3. Sea $E = \mathbb{Q}[\alpha, \beta]$ tal que $\alpha^2 \in \mathbb{Q}$, $\beta^2 \in \mathbb{Q}$ y $|E : F| = 4$. Si $\gamma \in E \setminus \mathbb{Q}$ es tal que $\gamma^2 \in \mathbb{Q}$, muestre que γ es un múltiplo racional de α , β o $\alpha\beta$.
-

4. Sea G un grupo abeliano finito.
- (a) Pruebe que toda representación irreducible de G sobre los complejos tiene dimensión 1.
 - (b) Describa todas las representaciones 1-dimensionales de G , con ayuda del Teorema Fundamental de Grupos Abelianos.
 - (c) Calcule la tabla de caracteres del grupo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, usando (a) y (b).
-

5. [Sea $R = \mathbb{C}[x, y]/\langle x^2 - y^3, 4y^2 - 5x^2y + x^4 \rangle$.
- (a) Muestre que R es artiniiano y halle los ideales maximales de R . ¿Cuántos ideales maximales hay?
 - (b) Calcule la dimensión de la localización $R_{\mathfrak{m}}$ para cada maximal $\mathfrak{m}$, y la dimensión de R como espacios vectoriales complejos.
-

6. Sea W una representación finito-dimensional compleja de un grupo G . Recuerde que un producto hermitiano $\langle u, v \rangle$ en W se dice G -invariante si satisface la siguiente propiedad

$$\forall v_1, v_2 \in W, \forall g \in G (\langle v_1, v_2 \rangle = \langle g \cdot v_1, g \cdot v_2 \rangle)$$

Demuestre las siguientes afirmaciones:

- (a) Si $W_1, W_2 \subseteq W$ son subrepresentaciones irreducibles no isomorfas y $\langle, \rangle$ es un producto hermitiano G -invariante en W entonces W_1 y W_2 son mutuamente perpendiculares, es decir

$$\forall w_1 \in W_1, w_2 \in W_2 (\langle w_1, w_2 \rangle = 0)$$

- (b) Dé un ejemplo que verifique que (b) no es cierta sin la hipótesis de que W_1 y W_2 no son isomorfas.

- (c) Si W es una representación irreducible entonces existe un único producto hermitiano G -invariante en W , módulo multiplicación por un número real no nulo.

7. Sea S_n el grupo de permutaciones del conjunto $\{1, \dots, n\}$. Demuestre las siguientes afirmaciones:
- (a) Para toda permutación σ existe una única n -tupla de enteros $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ con $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = n$ tal que σ es conjugada a la permutación $\tau(\sigma)$ dada como producto de ciclos disjuntos por
- $$\tau(\sigma) = (12 \dots \lambda_1)(\lambda_1 + 1 \dots \lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2 + 1 \dots \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \dots (\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1} + 1 \dots n)$$
- (b) Encuentre una fórmula para el cardinal de la clase de conjugación de σ en términos de los números $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ y de los números $j_1, \dots, j_n$ donde j_i cuenta cuántos de los λ_s tienen tamaño igual a i .
- (c) Suponga que tenemos enteros $j_1, \dots, j_k \geq 0$ que satisfacen $\sum j_k k = n$. Demuestre que la probabilidad de que una permutación aleatoria (escogida de manera uniforme en S_n) tenga exactamente j_k ciclos de longitud k esta dada por

$$\prod_{k=1}^n \frac{1}{k^{j_k} j_k!}$$

8. Sea A un anillo conmutativo con unidad. Suponga que A es Noetheriano y que existe una sucesión de finitos ideales maximales $M_1, \dots, M_k$ de A tal que $(0) = \prod_{s=1}^k M_s$. Demuestre que A es Artiniano (i.e. que toda cadena descendente de ideales de A es eventualmente estacionaria) completando los siguientes pasos:

- (a) Demuestre que los A -módulos $\left(\prod_{s=1}^{k-1} M_s\right) / \prod_{s=1}^k M_s$ son espacios vectoriales de dimension finita sobre el campo A/M_i .
- (b) Demuestre que A tiene una serie de composición finita, es decir que existe una sucesión $A = B_0 \supset B_1 \cdots \supset B_r = 0$ de A -submódulos cuyos cocientes B_i/B_{i+1} son módulos simples (i.e. que no tienen submódulos propios no-triviales). (sugerencia: Demuestre que usando (a) es posible refinar la cadena:

$$A \supset M_1 \supset M_1 M_2 \supset M_1 M_2 M_3 \supset \dots \supset M_1 \dots M_k = (0)$$

A una serie de composición finita.)

- (c) Demuestre que si $N \subseteq A$ es un submódulo cualquiera y $N_i := N \cap B_i$ entonces algun subconjunto de las N_i es una serie de composición para N . Concluya que cualquier cadena de submódulos en A es de longitud finita y por lo tanto que A es artiniano.

9. (a) Sea F un campo que contiene todas las raíces n -esimas de la unidad. Sea K un campo de ruptura de la ecuación $t^n - a = 0$, para $a \in F$. Mostrar que K es una extensión de Galois sobre F con grupo de Galois un subgrupo del grupo cíclico de orden n .
- (b) Mostrar que el grupo de Galois del polinomio $t^4 - 2$ sobre los racionales tiene orden 8 y contiene un subgrupo cíclico de orden 4.