Departamento de Matemáticas – Universidad de los Andes

Examen de Conocimiento — Álgebra

19 de Julio 2018

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Las respuestas deben ser justificadas.

Favor marcar cada hoja únicamente con su cédula (no** indique su nombre).**

Tiempo máximo: 180 minutos.

I. Sea F un cuerpo y V un F-espacio vectorial. Sea V^* el *espacio dual*; es decir, el espacio de funciones F-lineales de V en F.

1. Suponga que V tiene dimensión finita y $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V. Definimos elementos $v_1^*, \dots, v_n^*$ de V^* por

$$v_i^*(v_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

   Demuestre que $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ es una base de V^*.

2. Sea P el espacio de polinomios en una sola variable x y considere la base $\{1, x, x^2, \dots\}$ de P. Encuentre un elemento de P^* que no está en el espacio generado por $\{1^*, x^*, (x^2)^*, \dots\}$.

II. Sea S_4 el grupo de permutaciones del conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ y A_4 el subgrupo de permutaciones pares.

1. Identifique explícitamente un subgrupo abeliano de orden cuatro $H \leq A_4$.
2. Calcule el tipo de isomorfismo de H.
3. Demuestre que H es normal en A_4.
4. Demuestre que H es único subgrupo propio no cíclico de A_4.

III. Dada una extensión de campos $F \leq E$, $G(E/F)$ denota el grupo de automorfismos de E que dejan fijos los elementos de F.

1. Calcule $G(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})/\mathbb{Q})$.
2. Muestre que $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}, i)$ es el campo de descomposición de $x^4 - 5$ y halle una base de K sobre $\mathbb{Q}$.
3. Muestre que $G(K/\mathbb{Q})$ no es conmutativo.
4. Muestre que $G(K/\mathbb{Q})$ es soluble.

IV. Un elemento a de un anillo conmutativo A es *nilpotente* si existe n tal que $a^n = 0$.

1. Demuestre que $a \in A$ es nilpotente si y solamente si pertenece a todos los ideales primos de A.
2. Demuestre que si A no tiene nilpotentes no triviales (es decir, el único nilpotente es cero) entonces se puede sumergir en un producto de campos algebraicamente cerrados.

V. Sea G un grupo finito.

1. Demuestre que toda representación compleja irreducible de G tiene dimensión 1 si y solo si G es abeliano.
2. Encuentre todas las representaciones complejas del grupo cíclico $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$.
3. Describa una representación compleja irreducible del grupo simétrico S_3 de dimensión dos.