Departamento de Matemáticas – Universidad de los Andes

Examen de Conocimiento — Álgebra

19 de mayo del 2018

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Las respuestas deben ser justificadas.

Favor marcar cada hoja únicamente con su cédula (no** indique su nombre).**

Tiempo máximo: 180 minutos.

I. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \to V$ una transformación lineal diagonalizable. Suponga que W es un subespacio T-invariante de V.

1. Suponga que $v_1, \ldots, v_k \in V$ son autovectores de T, cada uno asociado a un autovalor distinto. Demuestre que si $v_1 + \cdots + v_k \in W$, entonces $v_1, \ldots, v_k \in W$.

2. Demuestre que $T|_W$ es diagonalizable.

II. Responda las siguientes preguntas.

1. Enumere todos los grupos abelianos de orden 56.
2. Suponga que G es un grupo de orden 56 (no necesariamente abeliano). Demuestre que uno de sus subgrupos de Sylow de G es normal.
3. Suponga que G es un grupo de orden 56 y sus 7-subgrupos de Sylow no son normales. Demuestre que el 2-subgrupo de Sylow es isomorfo a $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$. (*Indicación:* utilice una acción por conjugación de un 7-grupo de Sylow sobre el 2-subgrupo de Sylow.)

III. Recuerde que un ideal J es *primario* si $ab \in J \implies a \in J$ o $b^n \in J$ para algún $n \geq 1$. Sea k un cuerpo y considere el ideal $I = (x^2, xy, xz, yz) \subseteq k[x, y, z]$.

1. Demuestre que los ideales $Q_1 = (x, y)$, $Q_2 = (x, z)$ y $Q_3 = (x, y, z)^2$ son primarios.
2. Demuestre que $I = Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3$.
3. Encuentre los primos aislados y los primos inmersos de I.
4. Calcule un conjunto generador de $\sqrt{I}$.

IV. Sea $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio irreducible el cual tiene raíces reales y no reales. Muestre que su grupo de Galois es no abeliano.

V. Sea G un grupo finito y X un G-conjunto finito no vacío.
Defina la representación por permutaciones asociada

$$L_X : G \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}[X]), \qquad L_X(g)(v_x) = v_{gx}$$

donde $g \in G, x \in X$ y $\mathbb{C}[X]$ es el espacio vectorial complejo con base $\{v_x : x \in X\}$.

1. Calcule el caracter de L_X.
2. Demuestre que L_X es simple si y solo si $|X| = 1$.