Examen de área en Álgebra 2017-2

Tiempo: 3 horas

PREGUNTAS

Problema 1: *Sea K un cuerpo y sea V un K-espacio vectorial.*

(a) Demuestre que existe una única transformación lineal $\pi : V \otimes V^* \to \mathrm{End}_K(V)$ tal que

$$\pi(v \otimes f)(x) = f(x)v.$$

(b) Demuestre que π es injectiva.

(c) Demuestre que $\mathrm{Im}(\pi)$ es la colección de K-endomorfismos de V con rango finito.

(d) Demuestre que π es un isomorfismo si y sólo si $\dim_K(V) < \infty$.

Problema 2: *Sea p un número primo y sea G un p-grupo finito no trivial.*

(a) Suponga que H es un sub-grupo normal no trivial de G. Muestre que el centro de G y H se intersectan de manera no trivial.

(b) Sea N un sub-grupo normal de G de orden p. Muestre que N está contenido en el centro de G.

Problema 3: *Sea K un cuerpo y sea $p(x) = x^3 + px + q \in K[x]$. Recuerde que si $p(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, en alguna clausura algebraica de K, entonces el discriminante de $p(x)$ está dado por $\Delta(p(x)) := (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2 = -4p^3 - 27q^2$.*

(a) Encuentre el grupo de Galois de $x^3 - x - 1$ sobre $\mathbb{Q}$.

(b) Encuentre el grupo de Galois de $x^3 - x - 1$ sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{-23})$.

Problema 4: Sea $D_8 = \left\langle \sigma, \rho \mid \rho^4 = \sigma^2 = id,\ \sigma\rho\sigma = \rho^{-1} \right\rangle$ el grupo dihédrico de 8 elementos.

(a) Muestre que $Z(D_8)$, el centro del grupo, es igual al grupo generado por ρ^2.

(b) Muestre que $D_8/Z(D_8) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(c) Escriba la tabla de carácteres de D_8. Justifique su respuesta.

Problema 5: *Sean $R \subseteq S \subseteq T$ anillos conmutativos con identidad. Suponga que R es Noetheriano, que T es a la vez finitamente generado como R-álgebra y finitamente generado como S-módulo. El proposito de este problema es mostrar que S es finitamente generado como R-álgebra.*

(a) Sean $x_1, \ldots, x_m$ generadores de T como R-álgebra y $y_1, \ldots y_n$ generadores de T como S-módulo. Muestre que existen $z_{ij}, z_{klp} \in S$, con $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j, k, l, p \leq n$, tales que

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} z_{ij} y_j, \; y_k y_l = \sum_{p=1}^{n} z_{klp} y_p.$$

(b) Sea $T_0 \subseteq S$ el R-álgebra generada por z_{ij}, z_{klp}. Muestre que T_0 es un anillo Noetheriano (*Sugerencia: Utilice el teorema de la base de Hilbert*).

(c) Muestre que S es un T_0-módulo finitamente generado. (*Sugerencia: Muestre que T es un T_0-módulo finitamente generado.*)

(d) Concluya que S es una R-álgebra finitamente generada.