Examen de área en Álgebra 2015-1

Tiempo: 3 horas

PREGUNTAS

Problema 1 *Sea n un entero positivo y sea P_n el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de polinomios en $\mathbb{R}[x]$ de grado menor o igual a n.*

(i) Muestre que existe un único $q_n(x) \in P_n$ tal que para todo $p(x) \in P_n$ se tiene que

$$p(0) = \int_0^1 q_n(x)p(x)\ dx.$$

(ii) Encuentre el polinomio $q_1(x)$ del punto anterior para el caso $n = 1$.

Problema 2: *En este problema $Z(G)$ y [G,G] denotan el centro y el subgrupo conmutador de un grupo G, y p un número primo.*

(i) Sea G un grupo tal que $G/Z(G)$ es cíclico. Muestre que G es abeliano.

(ii) Muestre que todo grupo de tamaño p^2 es abeliano.

(iii) Sea G un grupo no abeliano de tamaño p^3. Muestre que $Z(G) = [G, G]$. Más aun muestre que $Z(G)$ es el único sub-grupo normal de G de tamaño p.

Problema 3:

(i) Sean A, B y C grupos abelianos. Muestre que

$$\mathrm{Hom}(A \times B, C) \cong \mathrm{Hom}(A, C) \times \mathrm{Hom}(B, C).$$

(ii) Sea G un grupo abeliano finito y sea $\widehat{G}$ su grupo dual (i.e., el grupo de caracteres complejos de G). Muestre que $G \cong \widehat{G}$. (*Sugerencia: Haga primero el caso* G *cíclico.*)

Problema 4:

(i) Sea $L/\mathbb{Q}$ una extensión algebraica finita y sea $R \subseteq L$ una $\mathbb{Z}$-algebra finitamente generada. Muestre que existen $n_1, ..., n_m$ enteros positivos tales que R es integral sobre $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n_1}, ..., \frac{1}{n_m}\right]$.

(ii) Sea M un ideal maximal en $\mathbb{Z}[x_1, ..., x_n]$ el anillo polinomial en n-variables sobre $\mathbb{Z}$. Muestre que existe un primo $p \in \mathbb{Z}$ tal que $p \in M$.(*Sugerencia: Si no existiera el primo* p *el cuerpo* $\mathbb{Z}[x_1, ..., x_n]/M$ *sería una extensión de* $\mathbb{Q}$ *finitamente generada como* $\mathbb{Q}$*-álgebra.*)

(iii) Sea F un cuerpo que es finitamente generado como $\mathbb{Z}$-álgebra. Muestre que F es finito.

Problema 5: *Asuma que todas la extensiones de* $\mathbb{Q}$ *que aparecen en este problema están contenidas en* $\mathbb{C}$. *Sea* $L/\mathbb{Q}$ *una extensión de Galois con grupo de Galois* $Gal(L/\mathbb{Q})$ *isomorfo al grupo cícliclo* $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

(i) Sea $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq L$ una sub-extensión cuadrática i.e., $[K : \mathbb{Q}] = 2$. Muestre que $K \subseteq \mathbb{R}$.

(ii) Sea F el cuerpo de descomposición de $x^3 - 2$ sobre $\mathbb{Q}$. Muestre que $LF/\mathbb{Q}$ es una extensión de Galois y que $[LF : \mathbb{Q}] = 24$.

(iii) Muestre que

$$\mathrm{Gal}(LF/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times S_3.$$

(iv) Encuentre $M/\mathbb{Q}$ extensión de Galois tal que $\mathrm{Gal}(M/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times S_3$.