Universidad de los Andes **Departamento de Matemáticas**

Examen de área en Álgebra 2014-2

Tiempo: 3 horas.

1. Muestre que $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - x) \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

2. Recuerde que un ideal I de un anillo conmutativo A es llamado primario si $fg \in I$ implica que $f \in I$ o $g \in r(I)$, donde $r(I)$ es el radical de I.

   Muestre que el radical de un ideal primario I es primo y que éste es el menor ideal primo que contiene a I.

3. Sea p un número primo y $\mathbb{F}_p$ el cuerpo de p elementos. El subgrupo de $GL(3, \mathbb{F}_p)$, dado por

$$H_3(\mathbb{F}_p) = \{\Omega(a, b, c) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & b & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{F}_p\}$$

   es llamado el grupo de Heisenberg modulo p.

   Sea V el espacio vectorial complejo con base indexada por lo elementos de $\mathbb{F}_p$, es decir, $V = \mathrm{Span}\{|x\rangle : x \in \mathbb{F}_p\}$. Para cada complejo z tal que $z^p = 1$ defina un función

$$\rho_z : H_3(\mathbb{F}_p) \to GL(V),$$

   por

$$\rho_z(\Omega(a, b, c))(|x\rangle) = z^{c+b(x-a)}|x - a\rangle$$

   for all $x \in \mathbb{F}_p$.

   (a) Muestre que ρ_z es una representación de $H_3(\mathbb{F}_p)$.

   (b) Calcule el caracter de ρ_z.

4. Considere el grupo abeliano G generado por a, b y c y determinado por las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} 3a + 9b + 9c &= 0, \\ -3b + 9c &= 0. \end{aligned}$$

   Por el Teorema Fundamental de los Grupos Abelianos Finitamente Generados, G es isomorfo a un producto de grupos cíclicos, ¿cuáles?

5. Sea $p(x) \in \mathbb{Q}(x)$ un polinomio irreducible de grado n y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ las n raíces de $p(x)$.

   (a) Demuestre que $F = \mathbb{Q}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ es una extensión de Galois de Q.

   (b) Demuestre que el grupo de Galois G de F sobre $\mathbb{Q}$ es isomorfo a un subgrupo de S_n, el grupo de permutaciones de n elementos.

   (c) Demuestre que G es isomorfo a un subgrupo de $A_n \subseteq S_n$ si

   $$\Delta = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)^2$$

   es el cuadrado de un elemento en $\mathbb{Q}$.

   (d) Determine a cuál subgrupo de S_3 es isomorfo el grupo de Galois de

   $$p(x) = x^3 - 2$$

   sobre $\mathbb{Q}$.

6. Sea A una matriz 3×3 con coeficientes en $\mathbb{R}$. Demuestre que existe una matriz C invertible con coeficientes en $\mathbb{R}$ tal que $C^{-1}AC$ es igual a una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

con λ_1, λ_2 y λ_3 no necesariamente distintos; o,

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$