Examen de Área de Álgebra (2013-1).

1. Demuestre las siguientes afirmaciones usando los Teoremas de Sylow:
   (a) Todo grupo de orden 15 es cíclico.
   (b) No existe ningún grupo simple de orden 30. (Sugerencia: Muestre que G tendría que tener por lo menos 20 elementos distintos de orden 3 y por lo menos 24 de orden 5, obteniendo una contradicción).

2. Sea V un espacio vectorial de dimension finita sobre un campo K junto con una forma bilineal $\langle , \rangle : V \times V \to K$. Sea $D := \{v \in V : \langle V, v \rangle = 0\}$ y sea $I := \{v \in V : \langle v, V \rangle = 0\}$.
   (a) Construya una transformación T de V al dual de (V/D) tal que $\mathrm{Ker}(T) = I$.
   (b) Demuestre que $\dim(D) = \dim(I)$ y deduzca que T es sobre.

3. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo K. Suponga que $T : V \to V$ es un operador lineal con polinomio minimal $f(x) \in K[x]$
   (a) Si $f(x)$ tiene un factor no constante de grado m, demuestre que V tiene un subespacio no nulo con $\dim(W) \leq m$ y $T(W) \subseteq W$.
   (b) Recíprocamente, si V tiene un subespacio W de dimensión n con $T(W) \subseteq W$ entonces $f(x)$ tiene un factor no constante de grado $\leq n$.

4. (a) Sea R un anillo conmutativo con unidad y sea $S \subseteq R$ un subanillo. Para $a \in R$ demuestre que $S[a]$ es un S-módulo finitamente generado si y solo si a es un elemento entero sobre S (i.e. si a es solución de algun polinomio mónico con coeficientes en S).
   (b) Sea $R = k[a, b, c, d]/(ad - bc)$. Encuentre un subanillo $S \subseteq R$ isomorfo a un anillo de polinomios en tres variables sobre k tal que $S \subseteq R$ sea una extensión entera.

5. Sea n un primo y k un campo que contiene n raíces enésimas distintas de la unidad $1, \epsilon, \ldots, \epsilon^{n-1}$. Suponga que $k \subseteq K$ es una extensión de Galois con $\mathrm{Gal}(K/k) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \langle \sigma \rangle$.

(a) Demuestre que existe un elemento $y \in K$, $y \neq 0$ tal que $\sigma(y) = \epsilon y$.

(b) Demuestre que $K = k(y)$ y que $K \supseteq k$ es una extension radical.

6. Enuncie y pruebe la forma débil del Teorema de los ceros (Nullstellensatz) de Hilbert que caracteriza los ideales en $k[x_1, \ldots, x_n]$ que carecen de soluciones en k^n para un campo algebraicamente cerrado k.
(Sugerencia: Puede usar (sin necesidad de escribir una demostración) el siguiente Teorema: Sean $A \subseteq B \subseteq C$ anillos conmutativos con unidad con A noetheriano. Suponga que C es una A-álgebra finitamente generada y que C es un B-módulo finitamente generado. Entonces B es una A-álgebra finitamente generada.)