Exámen de área.
Álgebra (2012-2)

Instrucciones: Resuelva los siguientes problemas. Tiempo: 3 horas.

1. [8pts.] Sea G un grupo finito y suponga que G actua en el conjunto X. Es decir que hay un homomorfismo de grupos $\phi : G \to \mathrm{Sim}(X)$.

   (a) Demuestre que $G_x := \{g \in G : \phi(g) \cdot x = x\}$ es un subgrupo de G.

   (b) Demuestre que $\mathrm{Ker}(\phi) = \bigcap_{x \in X} G_x$.

   (c) Demuestre que si $H \subseteq G$ es un subgrupo de índice n entonces existe un subgrupo normal de G con índice $\leq n!$ (Sugerencia: Construya un conjunto X con una acción de G y use los ejercicios anteriores).

2. [8pts.] Sea R un anillo conmutativo con unidad y sean M,N y P módulos sobre R.

   (a) Demuestre que si $f : M \to N$ es un homomorfismo de R-módulos entonces la función $g_f : M \otimes P \to N \otimes P$ dada por $g_f(m \otimes p) = f(m) \otimes p$ está bien definida y es un homomorfismo de R-módulos

   (b) Si $f : M \to N$ es un homomorfismo sobreyectivo verifique que el homomorfismo $g_f : M \otimes P \to N \otimes P$ es sobreyectivo

   (c) Sea $R = \mathbb{Z}$. Dé un ejemplo de módulos M, N, P y un homomorfismo inyectivo $f : M \to N$ para el cual el homomorfismo $g_f : M \otimes P \to N \otimes P$ no sea inyectivo.

3. [8pts.] Sea G un grupo con 35 elementos.

   (a) Demuestre que G tiene subgrupos normales H y N de tamaño 5 y 7 respectivamente.

   (b) Demostrar que G es isomorfo a $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

4. [12pts.] Sea $L : V \to V$ un operator lineal sobre un espacio vectorial de dimensión finita cuyos autovalores son todos iguales a 1 y que permuta un conjunto S de vectores que genera a V. Demostrar que $L = id_V$. (Sugerencia: Note que L determina un elemento de $\mathrm{Sim}(S)$, utilice ésto para entender el polinomio minimal de L)

5. [12pts.] Sea A un anillo noetheriano. Entonces A es un dominio de factorización única si y solo si cada elemento irreducible es primo.

6. [12 pts.] Sea p un primo y sea G un grupo de tamaño p^2.

   (a) Demostrar que G es abeliano.

(b) Cuál es el máximo número de subgrupos que puede tener G?

7. [12 pts.] Sea $V = \mathbb{C}^d$ y $\langle x, y\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ una funcion que satisface las siguientes propiedades para todos $x, y, z \in V$ y $\alpha \in \mathbb{C}$

   (a) $\langle \alpha x + y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

   (b) $\langle z, \alpha x + y\rangle = \overline{\alpha}\langle z, x\rangle + \langle z, y\rangle$

   (c) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.

   (d) $\langle x, x\rangle \geq 0$ (note que $\langle x, x\rangle$ es siempre un número real por (3))

   Sea $T : V \to V$ una transformación lineal tal que $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ para todos $x, y \in V$.

   (a) Demuestre que los valores propios de T son números reales y que vectores propios de valores propios distintos son $\langle , \rangle$ ortogonales.

   (b) Demuestre que T es diagonalizable y que puede escogerse una base de vectores propios que sea $\langle , \rangle$ ortonormal. (Sugerencia: Si v es un vector propio de T demuestre que $v^{\perp} := \{y \in V : \langle y, v\rangle = 0\}$ es dejado invariante por T)

   (c) T es semidefinida positiva ssi $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ para toda $x \in V$. Demuestre que T es semidefinida positiva ssi todos sus valores propios son no negativos.

8. [12 pts.] Sea p un primo y sea $\mu \in \mathbb{C}$ una p-ésima raíz primitiva de la unidad.

   (a) Demuestre que el grupo de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu)/\mathbb{Q})$ es cíclico de tamaño $p - 1$.

   (b) Ahora suponga que n es tal que $p \equiv 1(\mathrm{mod(n)})$. Demuestre que hay un campo L con $\mathbb{Q} \subseteq L \subseteq \mathbb{Q}(\mu)$ con $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. (Lo anterior, junto con el teorema de Dirichlet de primos en progresiones aritméticas demuestra que todo grupo cíclico es el grupo de Galois de alguna extensión finita de $\mathbb{Q}$).