Examen de area en Algebra, Noviembre 2011

November 29, 2011

1. Sea s_n el número de sucesiones $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ de longitud n con $\epsilon_i \in \{0,1\}$ y
$$\epsilon_1 \leq \epsilon_2 \geq \epsilon_3 \leq \epsilon_4 \geq \dots \epsilon_n.$$
Encuentre una fórmula recursiva para s_n.

2. Determine los siguentes grupos abelianos:
   (a) $\mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$
   (b) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

3. Sea A un grupo abeliano finito y V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Sea $\phi : A \to GL(V)$ un homomorfismo de grupos. Demuestre:
   (a) Para todo $a \in A$ existe una base de V con respecto a la cual $\phi(a)$ es diagonal.
   (b) Existe una base de V con respecto a la cual $\phi(A)$ consiste exclusivamente de matrices diagonales.

4. Sea $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio de grado n y sea $R = \mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n, W]$ un anillo de polinomios en $n+1$-variables sobre $\mathbb{Q}$
   (a) Sea J el ideal $\Big(f(X_1), \dots, f(X_n), \Big(W \prod_{i<j}(X_i - X_j)\Big) - 1\Big)$ de R. Demuestre que existe un ideal M maximal propio de R con $M \supseteq J$.
   (b) Demuestre que $R/M \supseteq \mathbb{Q}$ es una extensión de ruptura para $f(x)$.

5. (a) Suponga que $K \supseteq k$ es una extensión de Galois y sea $G = \mathrm{Gal}(K/k)$. Para $\alpha \in K$ demuestre que el polinomio
$$f(x) = \prod_{g \in G} (x - g(\alpha))$$
tiene coeficientes en k y es divisible por el polinomio minimal de α sobre k.

(b) Sea $L = \mathbb{C}(t)$ y sea $\phi : \mathbb{C}(t) \to \mathbb{C}(t)$ el automorfismo de campos determinado por $\phi(t) = \frac{3t-2}{4t-3}$. Determine el subcampo

$$L^H := \{l \in L \text{ tales que } g(l) = l \text{ para todo } g \in H\}$$

(Sugerencia: Use la parte (a) para determinar el polinomio minimal de t sobre L^H).

6. Sea K un campo y $\overline{K}$ su clausura algebraica. Sea $P \in K[x]$ un polinomio mónico. Demuestre que P no tiene raíces múltiples en $\overline{K}$ ssi $gcd(P; P') = 1$, dónde P' es la derivada del polinomio P. Demuestre que si P es irreducible ésto es equivalente a que $P' = 0$.

7. Sea k un campo algebraicamente cerrado no contable.

   (a) Si t es trascendente sobre k demuestre que $k(t)$ es de dimensión infinita no contable sobre k (Sugerencia: Verifique que los elementos $(t-\lambda)^{-1}$, $\lambda \in k$ son linealmente independientes sobre k).

   (b) Sea $V \neq \{0\}$ un espacio vectorial de dimensión contable sobre k. Si $T : V \to V$ es un operador lineal, demuestre que el espectro de T es no vacío, es decir, que existe algun $\lambda \in k$ tal que el operador $T - \lambda I$ no es invertible. (Sugerencia: Muestre que de lo contrario, el espacio V es un espacio vectorial sobre el campo $k(t)$).

8. Sea $R = \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$. Demuestre las siguientes afirmaciones:

   (a) R no es un dominio de factorización única.

   (b) R no es integralmente cerrado en su campo de fraciones. (Sugerencia: Considere $(1 + \sqrt{5})/2$).