Examen de Area, Algebra

Mayo 26, 2011

Tiempo: 3 horas

1. Muestre que un grupo G posee exactamente tres subgrupos si y solamente si es cíclico de orden p^2.

2. Sea X un conjunto con un número primo p de elementos. Sea G un subgrupo de S_X, el grupo de permutaciones de X. Muestre que si G actua transitivamente sobre X y contiene al menos una transposición, entonces $G = S_X$. [Ayuda: Muestre que G contiene todas las transposiciones de S_X].

3. (a) Sea $f \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio irreducible con grado p, un número primo. Muestre que si f posee exactamente $p-2$ raices reales y 2 raices complejas en $\mathbb{C}$, entonces $\Gamma_{\mathbb{Q}}(f)$, el grupo de Galois de f sobre $\mathbb{Q}$, es S_p, el grupo simetrico en p elementos. [Ayuda: Usar el ejercicio anterior].

   (b) Sea $f = x^5 - 4x + 2$. Muestre que f es irreducible y encuentre $\Gamma_{\mathbb{Q}}(f)$, el grupo de Galois de f sobre $\mathbb{Q}$. Es f resoluble por radicales?.

4. Sean A y B matrices $n \times n$ sobre un campo $\mathbf{K}$. Demostrar que AB y BA tienen los mismos autovalores y polinomios caracteristicos.

5. Sea M un A-modulo noetheriano y $u : M \to M$ un homomorfismo de A-modulos. Demostrar que, si u es sobreyectivo, entonces u es un isomorfismo. [Ayuda: considerar los submodulos $\ker u^n$ de M].

6. Sea A un anillo conmutativo con unidad. Demostrar que un elemento $a \in A$ es nilpotente si y solo pertenece a todos los ideales primos de A.