EXAMEN DE ÁREA EN ÁLGEBRA, Diciembre 2010

1. Sea $\mathbf{k}$ un campo y $\mathbf{k}(x)$ el campo de funciones racionales sobre $\mathbf{k}$. Muestre que $\mathbf{k}(x) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}(x)$ no es un campo. Sugerencia: muestre que que el producto en $\mathbf{k}(x)$ induce un homomorfismo de $\mathbf{k}(x) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}(x)$ en $\mathbf{k}(x)$ que no es inyectivo.

2. Sean $m, n \in \mathbb{N}^+$, $(m, n) = 1$ y suponga G es un grupo abeliano tal que existe una sucesión exacta
$$0 \to \mathbb{Z}_m \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_n \to 0.$$
Muestre que $G \cong \mathbb{Z}_{mn}$ sin usar el teorema de estructura para grupos abelianos finitamente generados. Sugerencia: encuentre una preimagen a en G de un generador de $\mathbb{Z}_n$ tal que $na = 0$.

3. Sean $\mathbf{k}$ un campo, V un espacio vectorial sobre $\mathbf{k}$, y $\sigma : V \to V$ una transformación lineal. Para cada $\lambda \in \mathbf{k}$ considere el "espacio propio"
$$V^\lambda = \{v \in V : \sigma(v) = \lambda v\}.$$
Muestre que si $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ son diferente y $v_i \in V^{\lambda_i} \setminus \{0\}$, $i = 1, \ldots, l$, entonces $v_1, \ldots, v_l$ son linealmente independientes.

4. Sea K un campo de ruptura del polinomio $x^3 - 2$ sobre $\mathbb{Q}$. Calcule el grupo de Galois $Gal(K, \mathbb{Q})$.

5. Sea G un grupo y $H \leq G$ un subgrupo de índice $n < \infty$. Muestre que G tiene un subgrupo normal $N \leq H$ tal que $[G : N] \leq n!$. Sugerencia: Construya una accíon de G en un conjunto X de cardinalidad n.

6. Recordamos que un campo $\mathbf{k}$ se llama *perfecto* si cada extensión finita de $\mathbf{k}$ es separable. Suponga que $\operatorname{char} \mathbf{k} = p > 0$. Muestre que $\mathbf{k}$ es perfecto si y solo si la aplicación de Frobenius $Fr : \mathbf{k} \to \mathbf{k}$, $a \mapsto a^p$, es biyectiva. Concluya que todos los campos finitos son perfectos.

7. Sean $\mathbf{k}$ un campo algebraicamente cerrado y $\phi : \mathbf{k}[x, y]/(x^2 - y^3) \to \mathbf{k}[t]$ el homomorphismo de anillos definido por $\phi(x) = t^3, \phi(y) = t^2$ y $\phi(\lambda) = \lambda$, para $\lambda \in \mathbf{k}$. Muestre que la aplicación inducida $\phi^* : \max \mathbf{k}[t] \to \max \mathbf{k}[x, y]/(x^2 - y^3)$ es biyectiva pero que ϕ no es un isomorphismo de anillos. (Aquí $\max R$ denota el conjunto de ideals maximales en un anillo R.)

8. a) Muestre que un ideal principal de $\mathbb{Z}[x]$ no puede ser maximal.

   b) Sea $\mathfrak{m} \subset \mathbb{Z}[x]$ un ideal maximal. Muestre que $\mathfrak{m} \cap \mathbb{Z} \neq (0)$. Sugerencia: Use que $\mathbb{Q}[x]$ es un DIP.