Examen de Area, Algebra

Diciembre 4, 2009

1) Sea G un grupo no abeliano de orden p^3, donde p es un primo. Muestre que $G/Z(G) \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ y que $Z(G) = G'$ es un subgrupo de orden p. [Ayuda: Primero muestre que si H es un grupo tal que $H/Z(H)$ es cíclico entonces H es conmutativo].

2)Muestre que todo grupo G de orden $1995 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$ es soluble. [Ayuda: Primero muestre que G posee un subgrupo normal de orden 19].

3)Sea R un anillo conmutativo con identidad. Decimos que un ideal I de R es irreducible si NO es posible escribir $I = I_1 \cap I_2$, donde I_1, I_2 son ideales propios de R que contienen propiamente a I.

(i) Sea $0 \neq x \in R$. Muestre que existe un ideal I_x de R maximal con respecto a la propiedad de que $x \notin I_x$.

(ii) Muestre que el ideal I_x de la parte (i) es irreducible.

(iii) Muestre que todo ideal primo P de R es irreducible.

4)Sea R un anillo y se V un R-módulo derecho. Suponga que todo submódulo de V es un sumando directo de V.

(i) Si W es un submódulo de V, muestre que todo submódulo simple de W es un sumando directo de W.

(ii) Si V es un módulo Artiniano, esto es si sus submódulos satisfacen la condición de cadena descendente o la condición minimal, demuestre que V es una suma directa de un número finito de submódulos simples.

5) Sea X un subespacio de $M_n(\mathbb{C})$, el $\mathbb{C}$-espacio vectorial de las matrices complejas de $n \times n$. Suponga que toda matriz distinta de cero en X es invertible. Muestre que $dim_C X \leq 1$. [Ayuda: Muestre que para $x, y \in X$, si $x \neq [0]$, entonces $y = kx$, donde $k \in \mathbb{C}$ es un valor propio de la matriz yx^{-1}].

6) Sea V un espacio vectorial de dimensin finita sobre un campo algebráicamente cerrado $\mathbf{k}$. Sea $T : V \to V$ un operador lineal. Denotemos por $I : V \to V$

al operador lineal identidad. Muestre que V posee una base que consiste de vectores propios de T si y solo si el kernel de $(\lambda I - T)^2$ es igual al kernel de $\lambda I - T$.

7) (i) Muestre que toda extensión finíta de campos es algebráica.

(ii) Muestre qe toda extensión algebáica simple es finita.

(iii) Sean F, E, K campos. Suponga que $F \subseteq E$ y $E \subseteq K$ son extensiones algebráicas. Es $F \subseteq K$ algebráica? Justificar su respuesta.

8) Sea $K = \mathbb{Q}(i, \sqrt{7})$.

(i) Mostrar que $\mathbb{Q} \subseteq K$ es una extensión de Galois.

(ii) Determinar el grupo de Galois $Gal(K : \mathbb{Q})$ y describir sus elementos.

(iii) Dibujar el retículo de los campos intermedios $\mathbb{Q} \subseteq F \subseteq K$ y escribir todos los campos intermedios K de la forma $K = \mathbb{Q}(u)$ para algún $u \in K$.