Examen de Area, Algebra, Junio 17 2009

En este examen cada anillo es conmutativo con identidad.

1) Sea F un campo y V un espacio vectorial sobre F. Sea V^* el espacio dual y V^{**} el doble dual. Sea $\pi : V \to V^{**}$, tal que $\pi(v)(f) = f(v)$ para $v \in V, f \in V^*$, la aplicación canónica.

$i)$ Muestre que π es inyectiva.

$ii)$ Muestre que π es sobreyectiva si $\dim V < \infty$.

$iii)$ Muestre que π no es sobreyectiva si $\dim V = \infty$.

2) Sean R un anillo y $I, J \subset R$ ideales. Muestre que $R/I \otimes_R R/J \cong R/(I+J)$ como anillos.

3) Sean p, q dos primos distintos y G un grupo de orden pq. Muestre que G es soluble.

4) Sea $f = x^4 - 5x^2 + 6 \in \mathbb{Q}[x]$. Muestre que f es irreducible sobre $\mathbb{Q}$. Determinar el campo de ruptura K de f sobre $\mathbb{Q}$ y el grupo de Galois $\Gamma(\mathrm{K} : \mathbb{Q})$. Para cada uno de los subgrupos de $\Gamma(\mathrm{K} : \mathbb{Q})$ diga cual es su campo fijo. Es K una extensión simple de $\mathbb{Q}$?

5) Sea K : F un extensión de campos.

$i)$ Muestre que existe un campo L, con $\mathrm{K} \supseteq \mathrm{L} \supseteq \mathrm{F}$, tal que K : L es algebraica y L : F es puramente trascendental.

$ii)$ Deducir de $i)$ que si dos campos algebráicamente cerrados F_1 y F_2 tienen la misma cardinalidad y la misma caracteristica, entonce ellos son isomorfos como campos.

6) Sea F un campo.

$i)$ Muestre que cada F-subalgebra[1] de $\mathrm{F}[x]$ es noetheriana.

$ii)$ Muestre que la F-subalgebra R de $\mathrm{F}[x, y]$ generada por $xy, x^2y, x^3y, \ldots$ no es noetheriana.

7) Sea R un anillo y M un R-modulo. Suponga que la localización $M_{\mathfrak{p}} = 0$ para cada ideal primo $\mathfrak{p} \subset R$. Muestre que $M = 0$.

Suerte!

[1]Recuerda que un F-algebra es un anillo que contiene F como subanillo.