Examen de Area, Algebra

Diciembre 5, 2008

1) Sea R un anillo conmutativo. Mostrar que R contiene un ideal primo minimo $\mathfrak{p}$ (i.e. un ideal primo que no contiene propiamente a otro ideal primo). Dar un ejemplo que muestre que $\mathfrak{p}$ puede no ser unico.

2) Sea R un anillo. Un R-modulo izquierdo V se dice simple si no tiene otros submodulos distintos a (0) y V. Sean V y W R-modulos simples. Entonces $V \oplus W$ tiene los 4 submodulos $(0), V, W$ y $V \oplus W$. Muestre que $V \oplus W$ tiene exactamente 4 submodulos si y solamente si V y W son no isomorfos.

3) Probar el lema de Schurs: Sea R una $\mathbf{k}$-algebra, donde $\mathbf{k}$ es un campo algebraicamente cerrado. Sea V un R-modulo simple y suponga que $\dim_{\mathbf{k}} V < \infty$. Sea $\phi : V \to V$ una funcion tal que $\phi(rv) = r\phi(v)$, para $r \in R, v \in V$. Muestre que $\phi = \lambda \cdot Id_V$, para algun $\lambda \in \mathbf{k}$.

4) Sea $\mathbf{k}$ un campo con $q < \infty$ elementos y sea $n > 0$. Sea $G = GL(n, \mathbf{k})$ el grupo de $n \times n$-matrices invertibles con coeficientes en $\mathbf{k}$ y sea B el subgrupo de matrices triangulares superiores. Calcular el indice $[G : B]$.

5) Sea H un subgrupo de G y suponga que $[G : H] = n$. Mostrar que existe un subgrupo K de H tal que K es normal en G y $[G : K] \leq n!$.

6) Sea ϕ la funcion de Euler y sean a, n enteros primos relativos. Mostrar que $a^{\phi(n)} = 1 \bmod n$.

7) Mostrar que $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (\prod_{n \geq 1} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \neq 0$ y que $\prod_{n \geq 1} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$.

8) Sea K un campo de ruptura para $x^4 - 14x^2 + 9$ sobre $\mathbb{Q}$. Encontrar el grupo de Galois $Gal(K, \mathbb{Q})$.