Departamento de Matemáticas Universidad de los Andes

Examen de Área de Magister y Doctorado

ALGEBRA

Mayo 23 de 2008

1. Muestre que el centro de un p-grupo finito no es trivial.

2. Demuestre que todo subgrupo finito de $(S^1, \cdot)$, el círculo con la multiplicación compleja, es cíclico.

3. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo F y $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal. Demuestre que existe un polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_k x^k \in F[x]$ tal que $p(T) = a_0 I + a_1 T + ... + a_k T^k \equiv 0$.

4. Sea V un espacio vectorial con producto interno, $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal, y T^* su adjunta. Muestre que $\operatorname{Ker}(TT^* + T^*T) = \operatorname{Ker} T \cap \operatorname{Ker} T^\star$.

5. Sea $E = \mathbb{Q}(\omega)$ donde $\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$.

   a) Muestre que E es un campo de descomposición.

   b) Muestre que $G(E/\mathbb{Q})$ es abeliano.

6. Muestre que todo campo de característica 0 es perfecto. Es decir, toda extensión de dimensión finita es separable.

7. Sea A un anillo conmutativo y $S \subseteq A - \{0\}$ cerrado bajo multiplicación. Demuestre que existe un ideal primo P de A tal que $S \cap P = \emptyset$.

8. Muestre que $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$.