Universidad de los Andes **Departamento de Matemáticas**

Examen de admisión al postgrado

24-10-2011
Tiempo 3 horas
Nivel Básico

Importante
1. Escriba su nombre y apellido en **todas las páginas** que usted utilice.
2. Por favor resuelva cada ejercicio en la hoja destinada para él. Si no le alcanza éste espacio, pida papel blanco al profesor que está en el salón.

1. Demuestre que la función $f(x) = 2x^5 + 8x^3 + 5x - 6$ tiene una y solo una raiz real.

   Solución

2. Calcular el área que genera, al rotar al rededor del eje x el arco de curva $y = cosh(x)$ (catenaria) que se obtiene para $x \in [0, 1]$.

   Solución

3. Determinar todos los x tal que la siguiente serie converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (3x+1)^{-3n}.$$

Solución

4. Halle las coordenadas $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ del centro de masa de un octavo de esfera determinada por las desigualdades $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ y $z \geq 0$.

   Solución

5. Halle la integral de camino cerrada

$$\int_C \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

alrededor del camino C determinado por la frontera del cuadrado con vértices $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ y $(-1,-1)$, recorrido en la dirección opuesta las manecillas del reloj.

Solución

6. Considere la ecuación homogénea

$$t^2 y'' - 4ty' + 6y = 0, \quad t > 0.$$

Una solución de esta ecuación viene dada por $y_1(t) = t^2$. Use el método de reducción de orden para encontrar otra solución independiente de esta ecuación.

Solución

7. Sean $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la reflexión con respecto a la recta $y = x$ y $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotación de $\pi/2$ con centro en el origen. Halle la matriz canónica de $(U \circ T)^{1001}$.

   Solución

8. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

   (a) Hallar los valores propios de A.

   (b) Para cada valor propio, encontrar una base del espacio propio correspondiente.

   (c) Diga si A es diagonalizable y en caso afirmativo encuentre una matriz invertible C y una matriz diagonal D, tales que $C^{-1}AC = D$.

   Solución

9. Encuentre todas las soluciones para el sistema de congruencias

$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \mod 4 \\ x &\equiv 5 \mod 21 \\ x &\equiv 7 \mod 25 \end{aligned}$$

Solución

10. En un circuito de fórmula 1 hay n estaciones de gasolina, distribuidas aleatoriamente a lo largo del circuito. La suma de las cantidades de gasolina en cada estación alcanza para que un carro de formula 1, con éste combustible le de una vuelta completa al circuito. Mostrar que en cualquier configuración, con las condiciones arriba mencionadas, existe una estación de gasolina, a partir de la cual, un carro de formula 1 logra dar el circuito completo, sin quedarse sin gasolina. Se supone que en cada estación a que llegue el carro, éste puede tanquiar la totalidad de la gasolina disponible en ésta estación.

    Solución