Universidad de los Andes, Departamento de Matemáticas

Examen de Admisión al posgrado, sesión 1

Octubre 15, 2010

Resuelva los siguientes problemas de manera clara, escribiendo las respuestas de cada problema en hojas separadas. Duración: 3 horas.
Nombre:

Ejercicio 1

Demuestre que para todo n número natural mayor que cero se tiene que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Nombre:

Ejercicio 2

Un dado de seis caras es lanzado varios veces. Cuál es la probabilidad de que la primera vez que salga el número 5 ocurra en la cuarta lanzada?

Nombre:

Ejercicio 3

Use series de Taylor para calcular

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right).$$

Nombre:

Ejercicio 4

Considere la transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y, z) = (x - y + 4z, 3x - 2y - z, 2x + y - z).$$

Encuentre los vectores (a, b, c) y las constantes $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $T(a, b, c) = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$.

Nombre:

Ejercicio 5

Resuelva la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4 = x.$$

Nombre:

Ejercicio 6

Demuestre que la siguiente expresión no depende de x:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}dt.$$

Nombre:

Ejercicio 7

Calcule la longitud de la espiral E cuya ecuación está dada por

$$E(t) = \langle \cos(t), \sin(t), t \rangle$$

para $0 \leq t \leq 4\pi$.

Nombre:

Ejercicio 8

Sean $f : U \to V$ y $g : V \to W$ tranformaciones lineales entre espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ tales que $g \circ f$ es un isomorfismo. Pruebe que

$$V = \text{Imagen}(f) \oplus \text{Nucleo}(g).$$

Nombre:

Ejercicio 9

Determine las dimensiones (radio y altura) que minimicen el área superficial de un cilindro de base circular de volumen fijo de $1m^3$.

Nombre:

Ejercicio 10

Calcule el determinante de la matríz de tamaño $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix}$$

Universidad de los Andes, Departamento de Matemáticas

Examen de Admisión al posgrado, sesión 2

Octubre 15, 2010

Nombre:

Resuelva los siguientes problemas de manera clara, escribiendo las respuestas de cada problema en hojas separadas. Duración: 3 horas.

Ejercicio 11

Calcule la integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}dx.$$

Nombre:

Ejercicio 12

Sea G un grupo y H un subgrupo de G. Demuestre que si $[G : H] = 2$ entonces H es normal.

Nombre:

Ejercicio 13

Demuestre que toda función continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{Q}$ es constante.

Nombre:

Ejercicio 14

Muestre que todo polinomio irreducible en $\mathbb{Z}_p[x]$ es un divisor de $x^{p^n} - x$ para algún n.

Nombre:

Ejercicio 15

Sean A y B dos matrices $n \times n$ sobre un campo k takes que $AB = BA$, además suponga que ambas matrices son diagonalizables. Muestre que A y B son diagonalizables simultaneamente, i.e. muestre que existe una base para k^n formada de vectores propios de A y de B. Ayuda: muestre que B manda los espacios propios de A en sí mismos.

Nombre:

Ejercicio 16

Considere el espacio $\mathbb{R}^2$ con la topología inducida por la métrica euclidea. Determine si los siguientes conjuntos E son abiertos, cerrados y/o compactos, y determinar su clausura y su interior:

i) $E = \{(x, y) | x \in (0, 1], |y| \geq 2\}$

ii) $E = \{(x, \frac{1}{n}) | x \in (0, 1], n \in \mathbb{N}\}$

iii)

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\{(x, 1/n) | x \leq \frac{1}{n}\} \cup \{(1/n, y) | y > \frac{1}{n}\} \right)$$

Nombre:

Ejercicio 17

Sea la sucesión
$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$$

i) Encuentre los límites simples (punto a punto) f de la sucesión $\{f_n\}_{n\geq 0}$ y g de la sucuesión $\{f_n'\}_{n\geq 0}$.

ii) Muestre que $f'(x)$ existe para todo x real pero $f'(0) \neq g(0)$. Halle los valores de x para los cuales se tiene que $f'(x) = g(x)$.

iii) Encuentre los intervalos en $\mathbb{R}$ para los cuales $\{f_n\}_{n\geq 0}$ y $\{f_n'\}_{n\geq 0}$ convergen uniformemente.