Universidad de los Andes **Departamento de Matemáticas**

Examen de admisión al postgrado

Nivel Básico

13-10-2009

Tiempo 3 horas

Importante

1. Escriba su nombre y apellido en **todas las páginas** que usted utilice.
2. Por favor resuelva cada ejercicio en la hoja destinada para él. Si no le alcanza este espacio, pida papel blanco al profesor que está en el salón.

1. Sea R la región del plano limitada por las curvas $y = x,\ y = \sqrt{x}$. Hallar el volumen que resulta de rotar la región R alrededor de la recta $x = -1$.

   Solución

2. Hallar la integral indefinida $\displaystyle\int \frac{1}{x^{1/2} + x^{1/3}}\, dx$.

   Solución

3. (a) Definir el radio de convergencia de una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$.

   (b) Hallar el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$.

   Solución

4. (a) Hallar la integral de camino cerrado

$$\int_C \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2},$$

donde C es el círculo $x^2 + y^2 = 1$ orientado en la dirección de las manecillas del reloj.

(b) ¿ Se puede calcular la integral por el teorema de Green? Justificar su respuesta.

Solución

5. Sea $M_{n\times n}$ el espacio vectorial de la matrices cuadradas de orden n con coeficientes reales, $A \in M_{n\times n}$ y $f_A : M_{n\times n} \to \mathbb{R}$ la forma lineal definida por

$$f_A(B) = \operatorname{tr}(BA),$$

donde tr designa la traza de una matriz, es decir, la suma de sus elementos diagonales.

Se denota $M^*_{n\times n}$ el dual de $M_{n\times n}$ (o sea el espacio de las formas lineales de $M_{n\times n}$ en $\mathbb{R}$). Mostrar que el operador $\Psi : M_{n\times n} \to M^*_{n\times n}$ definido por $\Psi(A) = f_A$ es un isomorfismo lineal.

Solución

6. Resolver la ecuación diferencial dada por

$$y'' + 4y' + 5y = x + e^{-x}.$$

Solución

7. Sea $f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \text{sen }(kx)$, donde n es un entero positivo y a_k es un número real para $k = 1, \ldots, n$. Suponga que $|f(x)| \leq |\text{sen } x|$ para todo x. Mostrar que $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1$.

Solución

8. En una versión reducida del juego del Baloto, el apostador elige cuatro números de una matriz formada por todos los números de 1 a 20. Al hacerse el sorteo se determinan cuatro números ganadores entre 1 y 20.

   (a) ¿ Cuál es la probabilidad que el apostador elija los 4 números ganadores?

   (b) ¿ Cuál es la probabilidad de que entre los cuatro números elegidos por el apostador figuren exactamente dos de los cuatro números ganadores?

   Solución

Universidad de los Andes **Departamento de Matemáticas**

Examen de admisión al postgrado

Nivel avanzado

13-10-2009

Tiempo 3 horas

Importante

1. Escriba su nombre y apellido en **todas las páginas** que usted utilice.
2. Por favor resuelva cada ejercicio en la hoja destinada para él. Si no le alcanza este espacio, pida papel blanco al profesor que está en el salón.

1. (a) Sean H y K subgrupos de un grupo finito G con $mcd(|H|, |K|) = 1$. Demostrar que $H \cap K = \{1\}$.

   (b) Sean H y K subgrupos normales de G con $mcd(|H|, |K|) = 1$. Demostrar que $kh = hk \ \forall h \in H, k \in K$.

   Solución

2. Sea $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Para n entero positivo sea $f_n \ : I \to \mathbb{R}$ tal que $f_n(x) = \operatorname{sen}^n x$

   (a) ¿ Es f_n puntualmete convergente en I?

   (b) ¿ Es f_n uniformemente convergente en I? Justificar.

   Solución

3. (a) Sea $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ una función uniformemente continua y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0, 1]$ una sucesión de Cauchy. Mostrar que $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ es también de Cauchy.

   (b) Sea $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ continua. Mostrar que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ existe si y solo si f es uniformemente continua.

   Solución

4. Sean X y Y dos espacios topológicos con Y de Hausdorff y $f : X \to Y$.

   (a) Mostrar que si f es continua entonces su gráfica $G(f)$ dada por $G(f) = \{(x, f(x));\ x \in X\ \}$ es cerrada en $X \times Y$.

   (b) Mostrar que la recíproca del numeral (a) es falsa

   (c) Mostrar que si Y es compacto y de Hausdorff entonces la recíproca del numeral (a) es verdadera.

   Solución

5. Sea $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^m$ $(m \geq 1)$ una transformación *bilineal.* [Esto es, fijado $x \in \mathbf{R}$, la transformación $y \longmapsto f(x,y)$ es lineal en y, y, fijado $y \in \mathbf{R}$, la transformación $x \longmapsto f(x,y)$ es lineal en x]. Dado $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, calcular la derivada $Df(a,b)$. Justificar *completamente* la respuesta.

   Solución

6. Sean P y Q dos polinomios con coeficientes reales tales que $\mathrm{gr}(Q) - \mathrm{gr}(P) \geq 2$ (gr denota el grado) y Q no tiene raíces reales. Mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = 2i\pi \sum_{k=1}^{k=n} \mathrm{res}(\frac{P}{Q}, a_k)$$

donde $\mathrm{res}(f, a)$ denota el residuo de la función f en el punto a y $a_1, a_2, \cdots, a_n$ son las raíces de Q de parte imaginaria estrictamente positiva.

Solución

7. Sean X e Y variables aleatorias con función de densidad de probabilidad conjunta dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 3x & \text{si} \quad 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso.} \end{cases}$$

Hallar una función de densidad de la variable aleatoria $Z = X - Y$.