

Nombre y apellido:

1

Universidad de los Andes

Departamento de Matemáticas

Examen de admisión al postgrado

7-5-2012

Tiempo 3 horas

Nivel Básico

Importante

1. Escriba su nombre y apellido en **todas las páginas** que usted utilice.
2. Por favor resuelva cada ejercicio en la hoja destinada para él. Si no le alcanza éste espacio, pida papel blanco al profesor que está en el salón.

1. Sea $P(a, b)$, $a > 0$, $b > 0$ un punto en el primer cuadrante del plano xy . Considere la familia de rectas que pasan por P e intersectan los semi-ejes positivos ($x > 0$, $y > 0$) en los puntos A y B . ¿Cuál es el valor, en términos de a y b , de la mínima longitud del segmento AB ?

Solución

2. Sea f la función definida por,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- (a) Demuestre que f es diferenciable en $x = 0$.
- (b) Halle la derivada de f en $x = 0$.

Solución

Nombre y apellido:

4

3. Evalúe la siguiente integral: $\int_1^2 \frac{1}{x^2 \sqrt{25x^2 - 4}} dx$,

Solución

4. La curva Γ es dada por la ecuación $(x - 1)^{2/3} + (y - 2)^{2/3} = 1$.

- (a) Hallar la longitud de la curva Γ .
- (b) Hallar el área de la región acotada por la curva Γ .

Solución

5. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 + e^t \\ y_2' = 3y_1 - 2y_2 - t \end{cases}$$

Solución

Nombre y apellido:

7

6. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, halle A^{99} .

Solución

7. Demuestre que si V es un espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \rightarrow V$ es una transformación lineal tal que $\text{Ker}(T) = \text{Im}(T)$ entonces la dimensión de V debe ser par.

Solución

8. Sea $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ y $a_n = (a_{n-1} + a_{n-2})/2$ para todo $n \geq 2$. Demuestre que

$$a_n = \frac{2}{3} \left[1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right].$$

Solución

Nombre y apellido:

10

9. Pruebe que para todo natural $n > 1$, el último dígito de $2^{2^{n+1}} + 1$ es 7.

Solución