Departamento de MatemáticasUniversidad de los Andes

Examen de Admisión al Posgrado
Mayo 20 de 2014

PARTE I
(2 horas)

Importante

1. Escriba su nombre y apellido en todas las paginas que utilice.
2. Resuelva cada ejercicio en ambos lados de la hoja en que aparece. Si necesita más espacio, pida papel adicional al profesor que está a cargo del examen.

Nombre y apellido:

1. a) Encuentre la serie de Taylor alrededor de $x = 0$ de la función

   $$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

   b) Encuentre para qué valores de p las serie siguiente converge: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln n}$.

Nombre y apellido:

2. a) Halle los siguientes límites para la función $f(x,y) = \dfrac{sen(xy) - y + 1}{x - y^2 + 1}$ en caso de que existan, o explique porqué no existen:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$$
$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y).$$

b) Halle el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(0,0,1)$.

Nombre y apellido:

3. El campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (2xe^y, x^2e^y, z)$ es un gradiente.

a) Halle su potencial $f(x, y, z)$.

b) Calcule $\int_C (2xe^y dx + x^2e^y dy + zdz)$ donde C es la curva dada por la parametrización $\tilde{\mathbf{c}}(t) = (\cos t, \sin t, \cos^2 t)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Nombre y apellido:

4. Sean $p(x)$, $q(x)$ funciones continuas para todo $x \in \mathbb{R}$. ¿Puede la función $y = \sin x^2$ ser solución de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

en algún intervalo $I = [a, b]$ tal que $0 \in I$? Justifique su respuesta.

Nombre y apellido:

5. Sea $P : V \to V$ una transformación lineal en un espacio vectorial V tal que $P^2 = P$, $P \neq 0, I$. Muestre que $V = Nuc(P) \oplus \mathrm{Im}(P)$ y halle los valores propios de P.

Nombre y apellido:

6. Calcule la siguiente integral de caminos en el plano complejo: $\displaystyle\oint_{|z-2|=2} z^4 \sin z \, \mathrm{d}z$.

Nombre y apellido:

7. a) Halle todas las raices complejas del polinomio $x^{101} - 1$.

b) Descomponga el polinomio $\sum_{n=0}^{100} x^n$ como producto de polinomios irreducibles sobre cada uno de los campos siguientes: (i) $\mathbb{C}$, (ii) $\mathbb{R}$, (iii) $\mathbb{Q}$ (observe que 101 es primo).

Nombre y apellido:

8. Muestre que el sistema

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{n_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{n_2} \end{cases}$$

tiene solución x si y solamente si $mcd(n_1, n_2)$ divide a $a_1 - a_2$.

Departamento de MatemáticasUniversidad de los Andes

Examen de Admisión al Postgrado
Mayo 20 de 2014

PARTE II
(2 horas)

Importante

1. Escriba su nombre y apellido en todas las paginas que utilice.
2. Resuelva cada ejercicio en ambos lados de la hoja en que aparece. Si necesita más espacio, pida papel adicional al profesor que está a cargo del examen.

Nombre y apellido:

1. Dados espacios métricos A, B, sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas $f_n : A \to B$ que converge uniformemente a f, y sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de A que converge a x.

a) Demuestre que $\underset{n\to\infty}{lim} f_n(x_n) = f(x)$.

b) Demuestre con un contraejemplo que lo anterior no es cierto si la convergencia es puntual pero no uniforme.

Nombre y apellido:

2. Pruebe que si $A \subseteq \mathbb{R}^2$ es enumerable, entonces $\mathbb{R}^2 \setminus A$ es arcoconexo (conexo por caminos).

Nombre y apellido:

3. Sea X un espacio de Hausdorff. Dados un suboconjunto compacto $C \subseteq X$ y un punto $p \in X$ tal que $p \notin C$. Demuestre que existen abiertos disyuntos V, W tales que $p \in V$ y $C \subseteq W$.

Nombre y apellido:

4. Una variable aleatoria X cumple que $\mathbb{E}(X) = 3$ y $\mathbb{E}(X^2) = 10$. Use la desigualdad de Chebyshev para obtener una cota inferior para $\Pr(-2 < X < 8)$.

Nombre y apellido:

5. Sean M y N subgrupos normales de un grupo G, tales que $G = MN$. Mostrar que $G/M \cap N \cong G/M \times G/N$.

Nombre y apellido:

6. a) Complete la definición "Un campo F tiene característica $p \in \mathbb{N}$ si..."

b) Demuestre que si un campo tiene característica p entonces $p \in \mathbb{N}$ es un número primo.

c) Sea F un campo finito de característica p. Demuestre que $|F| = p^n$ para algun entero no negativo n.

d) De un ejemplo de un campo finito con 4 elementos.