Examen de admisíon posgrado, nivel básico

Universidad de Los Andes   Departamento de matemáticas

06-05-2013
tiempo 3 horas

Importante

1. Escriba su nombre y apellido en todas las paginas que use.

2. Por favor resuelva cada ejercicio en la hoja destinada para él. Si no le alcanza este espacio, pida papel blanco adicional al profesor que está en el salón.

SUERTE!

Nombre y apellido:

1) Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ y considere la transformación lineal $T_A : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$ definida por:

$$T_A(X) = AX,$$

para $X \in M_2(\mathbb{C})$. (Aquí $M_2(\mathbb{C})$ es el espacio de matrices 2 por 2 sobre $\mathbb{C}$.)

(i) Calcule $\det T_A$, diga si T_A es invertible.

(ii) Es T_A diagonalizable? En caso de serlo, dé una base para $M_2(\mathbb{C})$ formada por vectores propios.

Nombre y apellido:

2) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión dada por

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n} \text{ para } n \geq 1.$$

Determine si la sucesión converge. Si converge, halle su límite.

Nombre y apellido:

3) (i) Halle las series de Taylor de las funciones $f(x) = \frac{1}{1+x}$ y $g(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ alrededor de $x = 2$ y determine sus intervalos de convergencia.

(ii) Qué es $f^{(32)}(2)$?

(iii) Encuentre el valor de $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(\frac{2}{3})^n$.

Nombre y apellido:

4) Evaluar la integral de superficie del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + yz, 2xz + 2y^2, 8xy + 4z^2)$ a través de la superficie Σ dada por la ecuación $4x^2 + 16y^2 + 64z^2 = 1$ orientada hacia adentro.

Nombre y apellido:

5) Una flecha lanzada por un arquero caerá en un punto del blanco cuyas coordenadas, X e Y (en pies), son variables independientes con distribución Normal(0,1). El punto $(0,0)$ coincide con el centro del blanco. Recuerde que la distribución Normal(0,1) tiene densidad de probabilidad

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Llamemos R a la distancia de (X, Y) al centro del blanco. Si $R < 0.2$ pies, el arquero recibe \$50. Si $0.2 \leq R < 1$ pies, el participante recibe \$10. Finalmente, si $R \geq 1$ el arquero no recibe ningún pago.

(i) Hallar la función de distribución acumulativa, $F_R(r)$, de la distancia R para $r > 0$.

(ii) Hallar la probabilidad de que el arquero reciba algún premio.

(iii) Hallar la probabilidad de que el arquero reciba el premio de \$50.

Nombre y apellido:

6) Sean $m, n, r \in \mathbb{N}$ primos relativos entre sí. Muestre que

$$\mathbb{Z}/(m) \times \mathbb{Z}/(n) \times \mathbb{Z}/(r) \cong \mathbb{Z}/(mnr)$$

son isomorfos como grupos.

Nombre y apellido:

7) Sea R un dominio de integridad. Demuestre que R es campo si satisface alguna de las siguientes condiciones:

1. R es finito.
2. R es un álgebra de dimensión finita sobre un campo.

Nombre y apellido:

8) Responda falso o verdadero, justificando (con un contraejemplo o una prueba, respectivamente) su respuesta.

(i) Si $T : V \to V$ es una transformacíon lineal en un espacio vectorial de dimensión finita, entonces $R_T = R_{T^*T}$.

(ii) Si V es un esacio vectorial de dimensión finita, W_1, W_2 y W_3 subespacios de V, entonces $V = W_1 \oplus W_2$ y $V = W_1 \oplus W_3$ implica que $W_2 = W_3$.

(iii) Si V es un espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \to V$ es lineal, entonces

$$V/N_T \cong R_T.$$

Nombre y apellido:

9) Considere la siguiente serie de funciones reales en la variable real x:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^2+n}{n^2}.$$

Muestre que esta serie converge uniformemente en todo intervalo acotado de $\mathbb{R}$ pero no converge absolutamente para ningún valor de x.

Nombre y apellido:

10) Demuestre que un grupo G tiene exactamente tres subgrupos (es decir, exactamente un subgrupo diferente de G y el subgrupo trivial) si y sólo si G es cíclico de orden p^2 con p un número primo.