Universidad de los Andes **Departamento de Matemáticas**

Examen de admisión al postgrado

30-04-2009

Tiempo 4 horas

Importante

1. Escriba su nombre y apellido en **todas las páginas** que usted utilice.
2. Por favor resuelva cada ejercicio en la hoja destinada para él. Si no le alcanza este espacio, pida papel blanco al profesor que está en el salón.

1. ¿ Hallar el conjunto de soluciones en $\mathbb{Z}^2$ de la ecuación

$$x^2y^2 = (x+y)^2$$

Solución

2. ¿ Mostrar que para cada todo entero n positivo se tiene

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^2$$

3. ¿ Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ una matriz cuadrada y $P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$ un polinomio no nulo con coeficientes reales. ¿ Es verdadero o falso? justificar plenamente.

   (a) Si A es simétrica entonces la matriz $P(A)$ lo es.

   (b) Si A es invertible entonces la matriz $P(A)$ lo es.

   (c) Si A es diagonalizable entonces la matriz $P(A)$ lo es.

   Solución

4. Sean S una región acotada del plano y $a(S)$ su área. La frontera de S es suave y es parametrizada por las ecuaciones $x = \alpha(t),\ y = \beta(t), \quad t \in [a,\ b]$. Mostrar que

$$2a(S) = \int_a^b [\alpha(t)\beta'(t) - \beta(t)\alpha'(t)]\ dt$$

Solución

5. Encontrar el área de la región que se encuentra en el primer cuadrante y dentro de los dos cardioides

$$r = 1 + \text{sen }(\theta), \qquad r = 1 + \cos(\theta)$$

Solución

6. Mostrar que para todo n entero positivo existe θ_n tal que $0 < \theta_n < 1$ y

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{\theta_n}{2n^2}$$

Solución

7. Resolver la ecuación diferencial
$$y' = -\frac{x^2y^3 + y}{x^3y^2 - x}$$

Solución

8. Hallar el dominio de definición, continuidad y de diferenciabilidad de la función

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}.$$

Hallar su derivada cuando ésta existe.

9. Calcular la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^2}\, dx$$

Solución

10. Sean $U \subset \mathbb{R}^m$ un abierto, $f : U \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 y $x_0 \in U$ tal que $f(x_0) = 0$ y $Df(x_0) \neq 0$. Sea E el conjunto de todos los vectores velocidad $\lambda'(0)$ de los caminos $\lambda : [-1,\ 1] \to U$ tales que $\lambda(0) = x_0$ y $f(\lambda(t)) = 0$ para todo $t \in [-1,\ 1]$. Demostrar que E es un subespacio vectorial de dimensión $m-1$ del espacio $\mathbb{R}^m$

    Solución

11. Mostrar que todo grupo de orden 15 es cíclico.

    Solución

12. Sea X una variable aleatoria continua con función de distribución estrictamente creciente F. Hallar la distribución de la variable aleatoria $Y := -\ln(F(X))$

    Solución

13. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$. Mostrar que si toda función continua de A en $\mathbb{R}$ es acotada entonces A es compacto.

14. Sean τ, σ dos topologías sobre un mismo conjunto X tales que $\tau \subseteq \sigma$. Demuestre que si (X, τ) es de Hausdorff y (X, σ) es compacto, entonces $\tau = \sigma$.