Universidad de los Andes, Departamento de Matemáticas

Examen de Admisión a la Maestría, Parte 1 de 2

Abril 25 de 2007

Resuelva todos los problemas de manera clara, escribiendo las respuestas de cada problema en hojas separadas. Duración: 2 horas.

Ejercicio 1

Sea $M_n(\mathbb{C})$ el espacio vectorial de las matrices $n \times n$ sobre los complejos.
a) Pruebe que la función $F(A, B) = tr(AB^*)$ define un producto interno en $M_n(\mathbb{C})$. Aquí B^* denota la transpuesta conjugada de B y tr es el operador traza, i.e. la suma de los valores de la diagonal.
b) Encuentre una base ortonormal de $M_n(\mathbb{C})$ con respecto a este producto interno.

Ejercicio 2

Mostrar que para cada $B \in M_n(\mathbb{C})$ el operador lineal $T_B : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ tiene determinante nulo, donde T_B está definido por $T_B(A) = AB - BA$.

Ejercicio 3

Demuestre el criterio de D'Alembert para la convergencia de series:
"Toda serie $\sum_{i\geq 1} a_i$ de términos positivos que satisfaga la condición

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

es convergente"

Ejercicio 4

Considere la sucesión de números reales $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ definida recursivamente por la ecuación

$$x_{n+1} = x_n^2 + x_n - 3$$

para $n \geq 0$. Determine los valores iniciales x_0 para los cuales se obtiene una sucesión constante.

Ejercicio 5

Dos personas A, y B lanzan cada uno una moneda 10 veces. Llamemos C al evento de que la moneda caiga en cara y S al evento de que caiga en sello. Supongamos que la moneda no está cargada y por lo tanto $Pr(C) = Pr(S) = \frac{1}{2}$.
Los lanzamientos de A son: $CSCCSCSSSC$
y los de B son: $CCCCCCCSSS$.
a) Cuál de las dos sucesiones de lanzamientos tiene una probabilidad más alta de ocurrir?
b) Cuál es la probabilidad de obtener al menos una cara en 10 lanzamientos?

Ejercicio 6

Encuentre la solución general de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2.$$

Universidad de los Andes, Departamento de Matemáticas
Examen de Admisión a la Maestría, Parte 2 de 2
Abril 25 de 2007

Resuelva todos los problemas de manera clara, escribiendo las respuestas de cada problema en hojas separadas. Duración: 2 horas.

Ejercicio 7

Sea G un grupo y $C(G) = \{g \in G |\ hg = gh \text{ para todo } h \in G\}$ su centro. Demuestre que si $G/C(G)$ es cíclico entonces G es abeliano.

Ejercicio 8

Demuestre que se tiene
$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$$
para todo número natural n.

Ejercicio 9

Demuestre que la esfera $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ no es homeomorfa al círculo $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Ejercicio 10

Determine los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que que la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{3}x^2 + ax + 2$ sea biyectiva.

Ejercicio 11

Decida que es más probable al lanzar un dado repetidamente. Obtener al menos un cinco en seis tiradas o al menos dos cincos en doce tiradas.

Ejercicio 12

Muestre que el número de raíces de la ecuación $z^4 + 5z + 1 = 0$ dentro del disco $|z| < 1$ es impar.