Universidad de los Andes **Departamento de Matemáticas**

Examen de admisión al postgrado, Parte II

10 de Noviembre 2015

Tiempo 3 horas

1. Sea $f_n \in C([0,1])$ una sucesión de funciones continuas que converge puntualmente a una función continua f y tal que $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in [0,1]$. Probar que la convergencia es uniforme.

2. Sea $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ un operador lineal con espectro simple (es decir, su polinomio característico no tiene raíces múltiples).

   (a) Mostrar que si $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ es un operador que conmuta con f entonces todo vector propio de f es también vector propio de g.

   (b) Mostrar que existe un polinomio P tal que $g = P(f)$.

3. Sean (X, d) y (Y, d') espacios métricos y $f : X \to Y$ un homeomorfismo.
   (a) Mostrar que X puede ser completo sin que Y lo sea.
   (b) Mostrar que si f es además uniformemente continua y Y completo entonces X es completo.

4. Evaluar la integral

$$\int_C \frac{dz}{z^3(z+4)}$$

donde la curva

(a) $C = \{z : |z| = 2\}$ (orientada positivamente y recorrida una vez),

(b) $C = \{z : |z+2| = 3\}$ (orientada positivamente y recorrida una vez).

5. Sea G es un grupo y $Z(G)$ su centro. Mostrar que si $G/Z(G)$ es cíclico entonces G es abeliano.

6. Sean (x, y, z, w) las coordenadas en $\mathbb{R}^4$. Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^4$ la solución del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 2 \\ x^2 + y^2 - z^2 - w^2 = 0 \end{cases}$$

   (a) Probar que Σ es una subvariedad diferenciable en $\mathbb{R}^4$.
   (b) Hallar la dimensión de Σ.
   (c) Probar que Σ es difeomorfa al producto de dos círculos.
   (d) Hallar la característica de Euler de Σ.

7. Sea $F(x)$ la función de distribución acumulativa de una variable aleatoria X. Es decir,

$$F(x) = \Pr(X \leq x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Probar que F es continua por la derecha con límite por la izquierda en todo punto.