

Nombre y apellido:

1

Universidad de los Andes

Departamento de Matemáticas

Examen de admisión al postgrado, Parte I

19 Mayo 2015

Tiempo 3 horas

1. (a) Mostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

- (b) Usando la definición de la integral de Riemann y el numeral anterior calcular

$$\int_0^1 (x^3 - 2) dx$$

2. ¿ Para qué valores de los reales α y β la integral

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha} \ln^{\beta} x}$$

converge?

Nombre y apellido:

4

3. Sea $f(x) = \frac{1}{x+5}$.

(a) Calcular $f^{(n)}(1)$ para $n \in \mathbb{N}$

(b) Hallar la suma

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{n 4^{n-1}}{6^{n+1}}$$

Nombre y apellido:

5

4. (a) Encuentre todos los enteros que son a la vez congruentes con 4 mdulo 31 y congruentes con 1 mdulo 17.

5. Sea

$$P(z) = z^3 + (-1 + 2i)z^2 + (3 - 2i)z + 6i.$$

Mostrar que la ecuación $P(z) = 0$ tiene una raíz imaginaria pura.

Nombre y apellido:

7

6. Resuelva la ecuación

$$y''' - 3y' + 2y = e^{3t}.$$

Ayuda: el polinomio característico de esta ecuación tiene a -2 como una raíz.

7. Sea v un vector columna no nulo en \mathbb{R}^n y $A = vv^T$ (Aquí v^T indica la transpuesta de v)
- (a) Hallar los valores propios de A .
 - (b) Mostrar A es diagonalizable.
 - (c) Hallar el polinomio mónico P de menor grado tal que $P(A) = 0$

8. Estudiar la continuidad de la función a

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$