

Departamento de Matemáticas – Universidad de los Andes

Examen de Admisión al Postgrado — Parte 2

Junio 11 de 2021

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Marque todas las hojas con su nombre completo.

Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.

Tiempo máximo: 180 minutos.

9. Sea f_k , para $k \in \mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$, una sucesión de funciones definida como:

$$\begin{cases} f_k(x) = x^k \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{para } x > 0 \\ f_k(x) = 0 & \text{para } x = 0. \end{cases}$$

Encuentre todos los valores de $k \in \mathbb{N}_0$ para los cuales:

- i. f_k es continua.
- ii. f_k es absolutamente continua en $[0, 1]$.

10. Decimos que un espacio topológico X es *pseudo-finito* si todo subespacio compacto de X es finito. Demuestre que si X es un espacio de Hausdorff, pseudo-finito y conexo por caminos, entonces $|X| = 1$ (i.e. X es un punto).

11. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, $W \subset V$ un subespacio y

$$\pi : V \rightarrow V/W$$

la proyección natural, $\pi(v) = v+W$. Sean $v_1, \dots, v_m$ una base para W y $v_{m+1}, \dots, v_n \in V$ vectores tales que $\pi(v_{m+1}), \dots, \pi(v_n)$ es una base para V/W . Muestre que $v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n$ es una base para V .

12. Sea G el grupo cociente $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

- i. Muestre que cada coconjunto $\bar{q} = q + \mathbb{Z}$ tiene un representante $q' \in [0, 1)$.
- ii. Muestre que cada $\bar{q} \in G$ tiene orden finito, aunque hay elementos cuyo orden es arbitrariamente grande.

13. Sea $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ el conjunto de matrices $n \times n$ con coeficientes reales y $SL_n(\mathbb{R})$ el grupo de matrices invertibles $X \in M_n(\mathbb{R})$ con tales que $\det(X) = 1$, donde $\det$ denota la aplicación determinante

$$\det : M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}.$$

- i. Calcule la derivada de la aplicación determinante en la identidad $I \in M_n(\mathbb{R})$.
- ii. Demuestre que, para cualquier curva suave $\gamma : [0, 1] \rightarrow SL_n(\mathbb{R})$ con $\gamma(0) = I$ (la matriz identidad), se tiene que $\gamma'(0)$ tiene traza nula.

14. Sea L una extensión de Galois de K tal que $\dim_K(L) = 4$. Demuestre que existe un cuerpo intermedio $K < M < L$ (e.d. $M \neq K$, $M \neq L$) tal que M es una extensión de Galois de K .

15.

- i. Sea $X \in \mathcal{L}^1$. Defina $Y_n = |X|1_{\{|X| \geq n\}}$ y muestre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[Y_n] = 0$.
- ii. Sean $X \in \mathcal{L}^1$ y $\epsilon > 0$. Muestre que existe $M > 0$ tal que $\mathbf{E}[|X|1_{\{|X| \geq M\}}] < \epsilon$.