Departamento de Matemáticas - Universidad de los Andes

Examen de Admisión al Posgrado, Parte 2

24 de abril de 2026

Este es un examen individual. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadora ni cualquier otro medio electrónico. Marque todas las hojas con su nombre completo. Toda respuesta debe ser justificada matemáticamente.

Tiempo máximo: **180 minutos**

1. **Variable Compleja**

(a) Demuestre que si $z = x+iy$, $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ es una función analítica compleja, entonces $(\nabla u) \cdot (\nabla v) = 0$, donde ∇ es el gradiente y $\cdot$ es el producto punto de cálculo vectorial.

(b) Dé, con justificación, un ejemplo de una función $f(z)$ no-analítica compleja pero con u, v continuamente diferenciables, tal que $(\nabla u) \cdot (\nabla v) = 0$.

2. **Análisis**

Sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{nx}{n^2 + x^2}$.

(a) Determine si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente.

(b) Determine si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente.

(c) Encuentre

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\downarrow 0} f_n(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\downarrow 0} \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

3. **Álgebra Lineal 2**

Sea V un espacio vectorial. Una transformación lineal $p : V \to V$ se llama un *proyector* si $p^2 = p$.

Sean p, q dos proyectores en V tal que $pq = 0$. Sea $r := p + q - qp$.

(a) Demuestre que r es un proyector.

(b) Demuestre que $\ker(r) = \ker(p) \cap \ker(q)$.

(c) Demuestre que $\mathrm{Im}(r) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$.

4. **Álgebra Abstracta 2**

Sea $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{5}] = \{a + bi\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ y considere el elemento $\alpha = 1 + i\sqrt{5}$.

(a) Defina la *norma* $N : A \to \mathbb{N}_0$ mediante $N(a + bi\sqrt{5}) = a^2 + 5b^2$. Demuestre que $N(uv) = N(u)N(v)$ para todos $u, v \in A$.

(b) Determine todas las unidades de A. Justifique su respuesta.

(c) Demuestre que α es irreducible en A.

(d) ¿Es α un elemento primo en A? (Indicación: Considere el elemento 2 en A y su relación con α y su conjugado $\overline{\alpha} = 1 - i\sqrt{5}$.)

5. **Probabilidad Avanzada**

Sea X una variable aleatoria con $\mathbf{E}[X] = \mu$ y $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$, y $a > 0$.

(a) Demuestre que $\mathbf{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbf{E}[|X|]}{a}$ (desigualdad de Markov).

(b) Demuestre que $\mathbf{P}(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$ (desigualdad de Chebyshev).

6. **Topología**

Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua, cerrada y sobreyectiva. Suponga que Y es compacto y que $f^{-1}(\{y\})$ es compacto para cada $y \in Y$. Demuestre que X es compacto.

7. **Geometría Diferencial**

Sea ω una 1-forma diferencial y sean ξ, η campos vectoriales. Demuestre que

$$d\omega(\xi,\eta) = \xi(\omega(\eta)) - \eta(\omega(\xi)) - \omega([\xi,\eta])$$

utilizando identidades estándar (de Cartan, de Jacobi, etc.).