Departamento de Matemáticas - Universidad de los Andes

Examen de Admisión al Posgrado, Parte 1

24 de abril de 2026

Este es un examen individual. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadora ni cualquier otro medio electrónico. Marque todas las hojas con su nombre completo. Toda respuesta debe ser justificada matemáticamente.

Tiempo máximo: **180 minutos**

1. **Cálculo Diferencial**

Si $\lim_{x \to 1} \dfrac{3x^2 + ax + b}{\ln x} = 1$, encuentre el valor de a y el valor de b.

2. **Cálculo Integral**

Demuestre que la siguiente serie converge y calcule su valor exacto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{(2n)!}$$

3. **Cálculo Vectorial**

Calcule el volumen de la caja rectangular más grande en el primer octante con tres caras en los planos coordenados y un vértice en el plano $x + 2y + 3z = 6$.

4. **Matemática Estructural**

Demuestre que todo entero $n \geq 12$ es de la forma $3a + 7b$ para algunos enteros no negativos a, b.

5. **Álgebra Lineal 1**

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $m \leq n$, y suponga que las filas de A son linealmente independientes.

(a) Demuestre que la matriz AA^T es simétrica.

(b) Demuestre que AA^T es definida positiva (es decir, que para todo vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ diferente de cero, se cumple $\mathbf{x}^T(AA^T)\mathbf{x} > 0$.)

(c) Demuestre que AA^T es invertible.

(d) Sea $B = A^T(AA^T)^{-1}$. Demuestre que

1. $AB = I_m$.
2. BA es simétrica.

6. **Álgebra Abstracta 1**

Sea G un grupo finito con identidad e. Un isomorfismo $f : G \to G$ se llama un automorfismo de G. Suponga que f es un automorfismo de G tal que $f(x) = x$ implica que $x = e$.

(a) Demuestre que cada $g \in G$ se puede expresar como $g = x^{-1}f(x)$ para algun $x \in G$.

(ii) Si ademas $f^2 = \text{id}$, demuestre que $f(g) = g^{-1}$ para cada $g \in G$ y concluya que G es abeliano.

7. **Ecuaciones Diferenciales**

Considere el problema $\begin{cases} y''(x) + y(x) = f(x) \\ y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$

Describa todas las funciones $f(x)$ para las cuales el problema tiene solución.

8. **Probabilidad Básica**

Una urna contiene r bolas rojas y a bolas azules. Se escoge al azar una bola de la urna y luego se devuelve a la urna junto con d bolas más del mismo color. Este proceso se repite otra vez.

(a) Calcule la probabilidad de que la segunda bola que se saca sea azul.

(b) Calcule la probabilidad de que la primera bola sea azul dado que la segunda también es azul.