**Departamento de Matemáticas - Universidad de los Andes**

Examen de Admisión al Posgrado, Parte 2

9 de mayo de 2025

Este es un examen individual. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadora ni cualquier otro medio electrónico. Marque todas las hojas con su nombre completo. Toda respuesta debe ser justificada matemáticamente.

Tiempo máximo: **180 minutos**

1. **Variable Compleja**

Use el teorema de Cauchy de los residuos para calcular la integral de contorno

$$\oint_{|z|=0.2} \frac{1}{z^2 \sin(z)} dz$$

donde el contorno es la circunferencia centrada en el origen y radio 0.2 orientada positivamente.

## 2. **Análisis**

Sea $X$ un espacio métrico y $A \subset X$ un conjunto cerrado. Para todo $x \in X$ defina

$$d_A(x) := \inf\{d(a, x) \mid a \in A\}.$$

(a) Demuestre que $d_A(x) : X \to \mathbb{R}$ es una función continua.

(b) Demuestre que $d_A(x) = 0$ si y sólo si $x \in A$.

(c) Demuestre que si $A, B$ son cerrados con $A \cap B = \emptyset$ entonces existen vecindades disyuntas $U, V$ con $A \subset U$ y $B \subset V$.

3. **Álgebra Lineal 2**

Una *sucesión exacta corta de espacios vectoriales* es una sucesión de la forma

$$0 \to V_1 \xrightarrow{T_1} V_2 \xrightarrow{T_2} V_3 \to 0, \tag{1}$$

donde $T_1$ es una transformación lineal inyectiva, $T_2$ es una transformación lineal sobreyectiva y $\operatorname{Im} T_1 = \operatorname{Ker} T_2$.

(a) Demuestre que si (1) es una sucesión exacta corta de espacios vectoriales de dimensión finita, existe un isomorfismo $V_2 \cong V_1 \oplus V_3$.

(b) Use lo anterior para demostrar que

$$M_n(\mathbb{R}) \cong S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R}),$$

donde $M_n(\mathbb{R})$, $S_n(\mathbb{R})$ y $A_n(\mathbb{R})$ denotan los espacios vectoriales de matrices $n \times n$ con coeficientes reales, matrices simétricas $n \times n$ con coeficientes reales y matrices antisimétricas $n \times n$ con coeficientes reales, respectivamente.

## 4. **Álgebra Abstracta 2**

(a) Sea $f(x) = x^4 + x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$. Determine el cuerpo de descomposición $E$ de $f(x)$ sobre $\mathbb{Q}$ y calcule $[E : \mathbb{Q}]$.

(b) Sea $E$ como arriba. ¿Se puede asegurar que $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i) = E$?

## 5. **Probabilidad Avanzada**

Considere una variable aleatoria bivariada $(X, Y)$ cuya función de densidad de probabilidad conjunta está dada por la función

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} C(x^2+y^2) & \text{si se cumple } x, y \geq 0,\ x+y \leq 1 \\ 0 & \text{si no se cumple.} \end{cases}$$

(a) Encuentre el valor de la constante $C$.

(b) Encuentre la distribución marginal de la variable $X$.

(c) Encuentre el coeficiente de correlación.

(d) Encuentre la probabilidad del evento $X \geq \frac{1}{4}$ condicionada al evento $Y = \frac{1}{2}$.

(e) Decida si las variables aleatorias $X$ e $Y$ son independientes.

6. **Topología**

(a) Demuestre que los espacios $[0,1]$ y $[0,1)$ no son homeomorfos.

(b) Demuestre que los espacios $[0,1)$ y $(0,1)$ no son homeomorfos.

(c) Demuestre que los espacios $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}$ no son homeomorfos.

## 7. **Geometría Diferencial**

Sean $(x, y)$ las coordenadas estándar en $\mathbb{R}^2$, y denote por $(r, \theta)$ las coordenadas polares para $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2$. Denote por $\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\}$ la base del espacio tangente en $\mathbb{R}^2$ y por $\{dx, dy\}$ la base dual, inducidas por las funciones coordenadas.

(a) Calcule la base $\left\{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right\}$ en términos de los campos vectoriales $\frac{\partial}{\partial x}$ y $\frac{\partial}{\partial y}$.

(b) Calcule la base dual $\{dr, d\theta\}$ en terminos de $dx$ y $dy$.

(c) Calcule el elemento de área $dA = dx \wedge dy$ en coordenadas polares.