

Departamento de Matemáticas - Universidad de los Andes

Examen de Admisión al Posgrado, Parte 1

9 de mayo de 2025

Este es un examen individual. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadora ni cualquier otro medio electrónico. Marque todas las hojas con su nombre completo. Toda respuesta debe ser justificada matemáticamente.

Tiempo máximo: **180 minutos**

1. Cálculo Diferencial

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ una función diferenciable en un punto $a \in \mathbb{R}$. Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+x)}{f(a)} \right)^{1/x} .$$

2. Cálculo Integral

Usando dos métodos distintos determine si la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 1}$$

converge absolutamente, converge condicionalmente o diverge.

3. Cálculo Vectorial

- (a) Sea σ la trayectoria cerrada formada por el triángulo con vértices $(0, 0, 1)$, $(0, 2, 0)$ y $(3, 0, 0)$ recorridos en este orden. Calcule

$$\int_{\sigma} z^2 dx + \frac{1}{6}x^2 dy + \frac{3}{4}y^2 dz.$$

- (b) Sea $\vec{F}(x, y, z) = (-e^y \sin x, e^y \cos x, e^z)$ y $\tau(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Calcule

$$\int_{\tau} \vec{F} d\vec{s}.$$

4. Matemática Estructural

Para cada $n \geq 0$, ¿cuál es más grande: 2^{3^n} o 3^{2^n} ? Justifique su respuesta.

5. Álgebra Lineal 1

Sea

$$H = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x - 2y + 3z + 2w = 0 \\ x + y - 9z - 4w = 0 \end{array} \right\} \text{ y } a = (5, 2, 9, 4).$$

- (a) Encuentre $\dim(H)$.
- (b) Encuentre una base ortonormal de H .
- (c) Encuentre una base de H^\perp .
- (d) Encuentre $v \in H$ y $u \in H^\perp$ tales que $a = v + u$.

6. Álgebra Abstracta 1

Considere los siguientes cinco grupos de orden 8:

$$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, D_8, Q$$

donde D_8 es el grupo diédrico y Q el grupo cuaterniónico. Demuestre que ningún par de estos grupos son isomorfos entre sí.

7. Ecuaciones Diferenciales

Sea $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ fijo, y considere el problema de valor inicial

$$y'' + a^2y = e^{-t}, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0.$$

Halle la solución general y especifique, si es posible, y_0, y'_0 tales que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

8. Probabilidad Básica

Hay dos personas, cada una de ellas tiene una moneda completamente equilibrada. Cada persona lanza 5 veces la moneda que tiene. Los lances de cada persona son independientes entre sí e independientes de los lances de la otra persona.

- (a) Encuentre la probabilidad del evento que ambas personas al arrojar su moneda **5 veces** obtengan el mismo número de caras.
- (b) Obtenga una expresión general para encontrar la probabilidad del evento de que ambas personas al arrojar su moneda n **veces** obtengan el mismo número de caras.