Departamento de Matemáticas - Universidad de los Andes

Examen de Admisión al Posgrado, Parte 2

1 de noviembre de 2024

Este es un examen individual. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadora ni cualquier otro medio electrónico. Marque todas las hojas con su nombre completo. Toda respuesta debe ser justificada matemáticamente.

Tiempo máximo: **180 minutos**

1. **Variable Compleja**

Encuentre todas las singularidades de las siguientes funciones y su parte principal en cada singularidad.

$$f(z) = \frac{z\mathrm{e}^z}{z^2 - 1}, \qquad g(z) = z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right), \qquad h(z) = \frac{\mathrm{e}^z - 1}{z^2}.$$

2. **Análisis**

Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$ definida inductivamente como sigue:

$$\begin{cases} f_1(x) = 0, \\ f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - f_n^2(x)\right) \quad \text{para } n \geq 1. \end{cases}$$

Demuestre que $(f_n)_n$ converge uniformemente a la función $x \mapsto \sqrt{x}$ en $[0,1]$.

3. Álgebra Lineal 2

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Sea $p : V \to V$ una transformación lineal. Decimos que p es una proyección si se tiene $p \circ p = p$. Demuestre que si p es una proyección, entonces p es diagonalizable y sus valores propios λ pertenecen al conjunto $\{0, 1\}$.

4. **Álgebra Abstracta 2**

Demuestre que si el grupo multiplicativo $F^{\times}$ de elementos no nulos de un campo F es cíclico, entonces F es finito.

5. **Probabilidad Avanzada**

Sea X una variable aleatoria real. Decimos que existe la función generadora de momentos (fgm), $M_X(t)$, cuando para algún $\delta > 0$, el valor esperado

$$M_X(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX}) \tag{1}$$

converge para todo $|t| < \delta$.

(a) Pruebe que si la fgm existe, entonces, para todo $k \in \mathbb{N}$, existe el k-ésimo momento de X, $\mathbb{E}|X|^k$. *Ayuda: Comience por observar que* $e^{tX} + e^{-tX} \geq e^{|tX|}$

(b) Para $0 < t < \delta$ y $\gamma > 0$, demuestre la desigualdad

$$\Pr(X > \gamma) \leq \mathrm{e}^{-t\gamma} M_X(t) \tag{2}$$

(c) Para la distribución exponencial(λ), con densidad $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$, para $x > 0$, verifique que $M_X(t)$ existe, para $|t| < \delta = \lambda$. Compare la cota dada en el caso exponencial(λ) por la desigualdad (2), usando $t = \delta/2$, con la verdadera probabilidad $\Pr(X > \gamma)$. ¿La cota es del mismo "orden de magnitud" de la probabilidad real?.

6. **Topología**

Considere el grupo $(\mathbb{R}, +)$ con la topología corriente y $(\mathbb{Z}, +)$ con la topología de subespacio. Muestre que el grupo $(\mathbb{R}, +)/(\mathbb{Z}, +)$ con la topología cociente es isomorfo y homeomorfo a $(S^1, \cdot)$, el círculo unitario con la multiplicación compleja y la topología heredada del plano.

7. **Geometría Diferencial**

(a) Demuestre que $S^1 \times S^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^4$ es una variedad diferenciable.

(b) Dado un punto $\vec{x} = (x, y, z, w) \in S^1 \times S^1$, encuentre una base y ecuaciones del plano tangente $T_{\vec{x}}\,(S^1 \times S^1) \subseteq \mathbb{R}^4$.

(c) Parametrice $S^1 \times S^1$ y calcule al área.