Departamento de Matemáticas - Universidad de los Andes

Examen de Admisión al Posgrado, Parte 1

1 de noviembre de 2024

Este es un examen individual. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadora ni cualquier otro medio electrónico. Marque todas las hojas con su nombre completo. Toda respuesta debe ser justificada matemáticamente.

Tiempo máximo: **180 minutos**

1. **Cálculo Diferencial**

   Encuentre el valor del límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$$

2. **Cálculo Integral**

Considere la función de valores reales definida así: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

(a) Encuentre el dominio de la función.

(b) Encuentre un N tal que $\left| f(-2) - \sum_{n=1}^{N} \frac{(-2)^n}{1+(-2)^{2n}} \right| < 0.01$.

3. **Cálculo Vectorial**

Sea $\vec{\mathbf{F}} = y\vec{i} - x\vec{j} + zx^3y^2\vec{k}$. Evalúe

$$\iint_S \nabla \times \vec{\mathbf{F}} \bullet \vec{n}\, dA \ ,$$

donde S es la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \leqslant 0$ orientada hacia arriba.

4. **Matemática Estructural**

En este ejercicio, (x, y) denota el máximo común divisor de x y y.

Verdadero o Falso: Si a, b, y c son cualesquier tres enteros distintos a 0, entonces

$$(a, (b, c)) = ((a, b), (b, c)).$$

Dé una demostración (en caso que es verdadero) o un contraejemplo concreto (en caso que no).

5. **Álgebra Lineal 1**

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Encuentre una matriz ortogonal Q y una matriz diagonal D tal que $A = QDQ^t$.

6. **Álgebra Abstracta 1**

Sea p un primo impar. Demuestre que todo grupo G de orden $2p$ o es cíclico o es dihedral.

7. **Ecuaciones Diferenciales**
Considere la ecuación diferencial

$$y'(t) + ty(t) = t. \tag{1}$$

(a) Resuelva la ecuación diferencial homogénea asociada

$$h'(t) + th(t) = 0.$$

(b) Sea $h(t)$ la solución que encontró en el punto anterior, y escriba

$$y(t) = u(t)h(t)$$

la solución a la ecuación original (1). Encuentre la ecuación que debe satisfacer u, resuélvala, y escriba la solución general de (1) que se puede hallar con este método.

8. **Probabilidad Básica**

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra i.i.d. de una distribución en $\mathbb{R}$, con densidad $f(x)$ y función de distribución acumulativa (fda), $F(x)$. Se definen los estadísticos de orden, $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$, que son los mismos datos, ordenados de menor a mayor. Es decir, $X_{(1)}$ es el dato más pequeño, $X_{(2)}$ es el segundo dato más pequeño, y así sucesivamente. Sea G_j la fda de $X_{(j)}$, $G_j(t) = \Pr(X_{(j)} \leq t)$, para t real. Demuestre que

$$G_j(t) = \sum_{i=j}^{n} \binom{n}{i} F(t)^i (1 - F(t))^{n-i}.$$

Ayuda: $X_{(j)} \leq t \Leftrightarrow j$ *o más datos son menores o iguales a* t.