Departamento de Matemáticas - Universidad de los Andes

Examen de Admisión al Posgrado, Parte 2

3 de mayo de 2024

Este es un examen individual. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadora ni cualquier otro medio electrónico. Marque todas las hojas con su nombre completo. Toda respuesta debe ser justificada matemáticamente.

Tiempo máximo: **180 minutos**

1. Variable Compleja

Sea f analítico en un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y suponga que el valor absoluto de f es constante. Muestre que f es constante.

2. Análisis

Demuestre o refute las siguientes dos afirmaciones.

- (a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ converge puntualmente para todo $x \in \mathbb{R}$.
- (b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ converge a una función continua en $\mathbb{R}$.

3. Álgebra Lineal 2

Sean V un espacio vectorial de dimensión finita n sobre $F = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y $H : V \times V \rightarrow F$ una forma bilineal no-degenerada. Sean W un subespacio vectorial de V y

$$W^\perp = \{u \in V : H(u, w) = 0 \forall w \in W\}$$

(es decir, el subespacio que es ortogonal a W con respecto a H .) Pruebe que

$$\dim(W) + \dim(W^\perp) = n.$$

4. Álgebra Abstracta 2

Sea $\alpha = \sqrt{3 + \sqrt{5}}$ y sea $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.

- (a) Calcule $[K : \mathbb{Q}]$.
- (b) Pruebe que K es Galois sobre $\mathbb{Q}$.
- (c) Determine el grupo de Galois de $K/\mathbb{Q}$.

5. Probabilidad Avanzada

Consideramos dos variables aleatorias X, Y independientes con distribución $\text{Exp}(1)$ y $\text{Exp}(2)$.
Calcule la densidad de $X + Y$, su esperanza y su varianza.

6. Topología

Sea X un espacio topológico compacto de Hausdorff. Demuestre que si C es un subconjunto cerrado de X y $x \notin C$, entonces existen abiertos U, V tal que $x \in U$, $C \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

7. Geometría Diferencial

Sean M_1 y M_2 las siguientes variedades:

- $M_1 = \mathbb{R}$ con la carta $\text{id} : \mathbb{R} \rightarrow M_1$ la función identidad,

- $M_2 = \mathbb{R}$ con la carta $h : \mathbb{R} \rightarrow M_2$ definida por $h(t) = t^{\frac{1}{9}}$.

Muestre que la función $f : M_1 \rightarrow M_2$ definida por $f(t) = t^{\frac{1}{3}}$ es una función diferenciable.