

Departamento de Matemáticas - Universidad de los Andes

Examen de Admisión al Posgrado, Parte 1

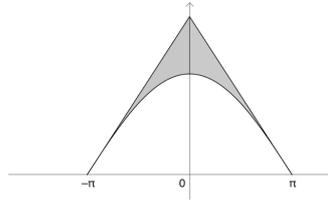
3 de mayo de 2024

Este es un examen individual. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadora ni cualquier otro medio electrónico. Marque todas las hojas con su nombre completo. Toda respuesta debe ser justificada matemáticamente.

Tiempo máximo: **180 minutos**

1. Cálculo Diferencial

En la figura está dada la parte de la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right)$, su recta tangente en $(-\pi, 0)$ y su recta tangente en $(\pi, 0)$.



Encuentre el área de la región sombreada.

2. Cálculo Integral

Determine si la siguiente integral converge o diverge. En caso de convergencia, determine el valor al que converge.

$$\int_1^{\infty} x^{-x}(1 + \ln x)dx$$

3. Cálculo Vectorial

Considere la región D determinada entre las curvas $y = 2x + 4$, $y = 2x - 4$, $y = -3x - 2$, $y = -3x + 2$

- (a) Encuentre unas nuevas variables $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, una región **rectangular** D_1 en las variables u, v y una transformación lineal T que mande la región D_1 en D .
- (b) Use el cambio de variables para hallar

$$\iint_D e^{y-2x}(y^2 + 6xy + 9x^2) \, dx \, dy$$

4. Matemática Estructural

Sean $n, m \in \mathbb{N}^*$.

- (a) Demuestre que si $m^2 = kn^2$, entonces k es el cuadrado de un número entero.
- (b) Demuestre que $n|m$ si y solamente si $n^2|m^2$.

5. Álgebra Lineal 1

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Encuentre una matriz ortogonal Q y una matriz diagonal D tal que $A = QDQ^t$.

6. Álgebra Abstracta 1

Sea $G = \langle a, b \mid a^7 = b^8 = e, ba = a^{-1}b \rangle$, es decir, el grupo generado por dos elementos a y b con las relaciones indicadas. Resulta que cada elemento de G se puede escribir de una **única** manera como $a^i b^j$ donde $0 \leq i \leq 6$ y $0 \leq j \leq 7$ (pero no tiene que demostrar esto).

1. ¿Existe un homomorfismo **sobreyectiva** $\varphi : G \rightarrow C_8$?¹
2. ¿Existe un homomorfismo **sobreyectiva** $\psi : G \rightarrow C_7$ tal que $\ker(\psi)$ es el subgrupo generado por b ?

¹ C_n es el grupo cíclico con n elementos.

7. Ecuaciones Diferenciales

Suponga que $y_1(x)$ es una solución de la ecuación $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ que no se anula en un intervalo I donde las funciones p y q son continuas. Encuentre otra solución $y_2(x)$ a partir del Wroskiano $W(x) = e^{-\int p(x)dx}$ (teorema de Abel).

8. Probabilidad Básica

Entre 100 personas hay 5 personas de una minoría particular. Al azar se escoge un grupo de 5 personas distintas entre de los 100.

- (a) ¿Según cuál distribución se distribuye el número de miembros de la minoría en la muestra?
- (b) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna persona de la minoría salga entre los 5? ¿Cuál es el valor esperado de miembros de la minoría en la muestra? Calcule el resultado sin calculadora hasta 2 cifras después de la coma.