Departamento de Matemáticas- Universidad de los Andes
Examen de Admisión al Posgrado — Parte 2
Junio 13 de 2023

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadora, o cualquier otro medio electrónico. Marque todas las hojas con su nombre completo.
Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.
Tiempo máximo:180 **minutos**

1. Considere $\mathcal{F}$ el espacio de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

    a) Pruebe que toda $f \in \mathcal{F}$ que sea Lipschitz es uniformemente continua.

    b) Halle $f \in \mathcal{F}$ que sea uniformemente continua pero que no sea Lipschitz.

    c) Halle $f \in \mathcal{F}$ que sea continua pero no uniformemente continua.

2. Un espacio topológico (X, τ) se dice totalmente disconexo si cada subconjunto conexo no vacío es de la forma $\{a\}$, para algun $a \in X$. Demuestre:

   a) El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ con la topología usual es totalmente disconexo.

   b) Si f es una función continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{Q}$, existe un $c \in \mathbb{Q}$ tal que $f(x) = c$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

   Un espacio topológico (X, τ) se dice 0-dimensional si existe una base para la topología tal que cada elemento de la base es abierto y cerrado en X. Demuestre que:

   c) Un espacio Hausdorff 0-dimensional es totalmente disconexo.

   d) Un subespacio de $\mathbb{R}$ es 0-dimensional, si y solo si es totalmente disconexo.

3. Sea $V = \mathbb{R}^3$ y sea W el subespacio de V dado por $W : x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

   a) Sea $W^0 := \{f \in V^* \ : \ f(w) = 0, \forall w \in W\}$. Provea un ejemplo de un elemento no nulo en W^0.

   b) Pruebe que $W^0 \cong (V/W)^*$, estableciendo un isomorfismo de espacios vectoriales.

4. Muestre que si X es una variable aleatoria de media μ que satisface para algún $\sigma \in \mathbb{R}$ y todo $\lambda \in [0, \infty)$
$$E[\exp(\lambda(X - \mu))] \leq \exp(\sigma^2 \lambda^2 / 2)$$
entonces
$$\mathbb{P}[X - \mu \geq t] \leq \exp(-t^2 / 2\sigma^2)$$
para todo $t \in [0, \infty]$.

Sug: Dado $t \geq 0$, la desigualdad de Markov implica que para todo $\lambda > 0$:
$$\mathbb{P}[X - \mu > t] = \mathbb{P}[\exp(\lambda(X - \mu)) > \exp(\lambda t)] \leq \frac{E[\exp(\lambda Z)]}{\exp(\lambda t)} \leq \exp((\sigma^2 \lambda^2 / 2) - \lambda t) := L(\lambda); \quad (1)$$
calcule el mejor estimativo que se sigue de la desigualdad entre los extremos de (1).

5. (Desigualdad de Hoeffding) Muestre que si $X_{1:n}$ es una secuencia independiente tal que $E[X_k] = \mu_k$ y para todo $k \in 1, \ldots, n$ existe $\sigma_k > 0$ con

$$E[\exp(\lambda(X_k - \mu_k))] \leq \exp(\sigma_k^2 \lambda^2 / 2) \tag{2}$$

para todo $\lambda > 0$ entonces

$$\mathbb{P}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mu_k) > t\right] \leq \exp\left(-\frac{(nt)^2}{2\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2}\right). \tag{3}$$

(*Sug:* Aplicar problema anterior).

6. Sea $N : \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida por $N(a + b\sqrt{-5}) = a^2 + 5b^2$.

   a) Demuestre que para todo $a, b \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ se tiene $N(ab) = N(a)N(b)$.

   b) Demuestre que 2 es irreducible en $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

   c) Use la igualdad $2 \cdot 3 = 6 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$ para demostrar que 2 no es primo en $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$

   d) Demuestre que en un dominio de factorización única todo irreducible es primo

   e) Demuestre que $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ no es un dominio de factorización única.

7. ¿Cuántos ceros tiene $f(z) = z^5 - z^4 + 2z^3 - 3z^2 - 5$ en el disco $\{z : |z| < 3\}$?

8. Dada la 1-forma en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

y

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

a) Calcular $d\omega$.

b) Parametrizar S^1 y calcular el pullback de ω.

c) Calcular la integral de la restricción de ω a S^1, es decir:

$$\int_{S^1} \omega$$

d) Demostrar que la forma ω no es exacta.