

**Departamento de Matemáticas- Universidad de los Andes**  
Examen de Admisión al Posgrado — Parte 1  
Junio 13 de 2023

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadora, o cualquier otro medio electrónico. Marque todas las hojas con su nombre completo.

Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.

**Tiempo máximo:180 minutos**

1. Encuentre el punto de la parábola  $y = 12 - x^2$  en el que la recta tangente junto con el eje  $x$  y el eje  $y$  forman el triángulo rectángulo de menor área en el primer cuadrante.

2. Estudiar la convergencia de las siguiente serie

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\ln n^{\ln n}}.$$

3. Sea  $f(x, y)$  una función diferenciable en  $\mathbb{R}^2$  y sea  $h(r, \theta)$  su representación en coordenadas polares.
- a) Encuentre fórmulas que expresan las derivadas parciales  $\frac{\partial h}{\partial r}(r, \theta)$   $\frac{\partial h}{\partial \theta}(r, \theta)$  en términos de  $\frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta)$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$ .
  - b) Encuentre una fórmula para el laplaciano  $\Delta f(x, y)$  en términos de las derivadas parciales de  $h$ .

4. Use series de potencias para resolver el problema de valor inicial

$$y'' + xy' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

5. Sean  $A, B, C$  y  $D$  conjuntos. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En cada caso justifique su respuesta.

a) Si  $A \subseteq B$  y  $C \subseteq D$ , entonces  $A \setminus D \subseteq B \setminus C$ .

b)  $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \times (A \setminus C)$ .

c)  $\mathcal{P}(A \triangle B) = \mathcal{P}(A) \triangle \mathcal{P}(B)$  (recuerde que  $A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ ).

d)

$$B \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (B \setminus A_i).$$

6. Sea  $V$  un espacio vectorial y  $T : V \rightarrow V$  una transformación lineal tal que para toda base  $\beta$  de  $V$ , la matriz que representa  $T$  con respecto a  $\beta$  es diagonal.
- a) Demuestre que  $T$  tiene un único autovalor.
  - b) Demuestre que  $T$  es un múltiplo de la identidad.

7. Muestre que si  $Z_1$  y  $Z_2$  son variables aleatorias independientes con densidades  $f_{Z_1}$  y  $f_{Z_2}$  entonces

$$\mathbb{P}[Z_1 = Z_2] = 0.$$

8. Sea  $G$  un grupo finito actuando sobre un conjunto finito  $A$ . La acción se dice transitiva si para cada  $a, b \in A$ , existe  $g \in G$  tal que  $ga = b$ . Demuestre que si  $|A| > 1$  y la acción es transitiva, entonces existe  $g \in G$  tal que  $ga \neq a$  para cada  $a \in A$ .