Departamento de Matemáticas – Universidad de los Andes

Examen de Admisión al Postgrado — Parte 2

Noviembre 16 de 2021

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Marque todas las hojas con su nombre completo.
Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.
Tiempo máximo: 180 minutos.

1. Álgebra abstracta 2.
Sea K un campo que contiene una raiz n-ésima primitiva de unidad. Sea $\alpha \in K$ y L un campo de ruptura para el polinomio $x^n - \alpha$ y G el grupo de Galois de esta extensión. Demuestre que G es cíclico. *Pista: se puede usar sin demostración que cada subgrupo finito del grupo multiplicativo K^* es cíclico.*

2. Variable compleja.

Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una función analítica en $\mathbb{C}$.

1. Demostrar que las curvas de nivel de $u(x, y)$ son perpendiculares a las curvas de nivel de $v(x, y)$.
2. Demostrar que $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son funciones armónicas. (Una función $H(x, y)$ es armónica si tiene derivadas parciales de segundo orden continuas y $H_{xx}(x, y) + H_{yy}(x, y) = 0$).
3. Demostrar que si $u(x, y)$ es una función acotada entonces $f(z)$ es constante.

3. Geometría diferencial básica.
Sea Σ un subconjunto en $\mathbb{R}^4$ con las coordenadas (x, y, z, w) dado por el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 - w^2 = 0 \end{cases} .$$

a) Demonstrar que Σ es una superficie (=subvariedad) 2-dimensional en $\mathbb{R}^4$.
b) Hallar el plano tangente y el plano normal a la superficie Σ en el punto $(1, 0, 0, -1)$.
c) Describa las componentes conexas de Σ.

4. Topología.
Sea $n \in \mathbb{N}$ y denote por $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$ con su topología de $\mathbb{R}^{n+1}$. Determine sobre S^n una relación $x \sim y$ si y solo si x y y pertenecen a la misma recta que pasa por el origen y considere el cociente $S^n/\sim$ con la topología cociente.

(a) Demuestre que S^1 y S^1 son homeomorfos.

(b) Demuestre que S^2 y S^2 NO son homeomorfos.

5. Álgebra lineal 2.

Considere la transformación lineal

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{C}^4 & \longrightarrow & \mathbb{C}^4 \\ (x_1,x_2,x_3,x_4) & \longmapsto & (-x_1+x_2-x_3-2x_4,\ 2x_1+x_2+2x_3+x_4, \\ & & \quad -x_1-2x_2-x_3+x_4,\ 2x_1+x_2+2x_3+x_4). \end{array}$$

Su polinomio caraterístico es $P_f(t)=(t-3)^4$. Encuentre la forma normal de Jordan de f.

6. Probabilidad Avanzado.

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de eventos que satisface $A_n \supset A_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $p_n = \mathbb{P}(A_n) \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, y

$$X(\omega) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{A_n}(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

1. Calcule la probabilidad de que $X = \infty$ en términos de las p_n. ¿Cómo se relaciona esto con el Lema de Borel-Cantelli?

2. Encuentre condiciones necesarias y suficientes en la sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\mathbb{E}[X] < \infty$.

3. Encuentre condiciones necesarias y suficientes en la sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ equivalentes a $\mathbb{E}[X^2] < \infty$.
Ayuda: Primero calcular la probabilidad de $\mathbb{P}(X = k+1)$ en terminos de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Usar la formula de sumación por partes para dos sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_m)_{n\in\mathbb{N}}$ convenientes y para $N \in \mathbb{N}$
$$\sum_{k=0}^{N} a_k b_k = a_N \sum_{k=0}^{N} b_k + \sum_{k=0}^{N-1} (a_k - a_{k+1}) \sum_{k=0}^{j} b_k.$$

7. Análisis 1.

Sean $f_n, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente convergente y g es uniformemente continua. Demuestre que $(g \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente convergente.