Departamento de Matemáticas – Universidad de los Andes

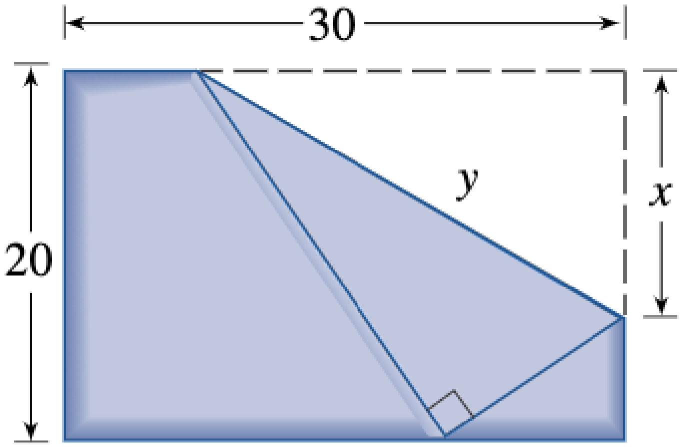
Examen de Admisión al Postgrado — Parte 1

Noviembre 16 de 2021

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Marque todas las hojas con su nombre completo.
Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.
Tiempo máximo: 180 minutos.

1. Cálculo diferencial.

Se pliega la esquina superior derecha de un pedazo de papel de $30cm$ por $20cm$, como en la figura, sobre la orilla inferior. ¿Cómo debería usted plegarla para minimizar la longitud del pliegue? En otras palabras, ¿Cómo se elige x para minimizar y?



2. Cálculo integral.

Determine si cada una de las siguientes series es convergente y si además es absolutamente convergente. Justifique su resultado.

a) $$\sum_{n\geq 2} \frac{\cos(n^2\pi)}{n\ln n}$$

b) $$\sum_{n\geq 2} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\ln n}$$

3. Cálculo vectorial.
Recuerde que el **momento de inercia** de un objeto sólido E con densidad $\rho(x, y, z)$ alrededor de una recta e esta dado por

$$I_e := \iiint_E \operatorname{dist}((x, y, z), e)^2 \rho(x, y, z) dV$$

donde $\operatorname{dist}((x, y, z), e)$ es la distancia entre (x, y, z) y la recta e.

Considere la siguiente familia de conos, dependiente del parámetro real $c \geq 0$:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq c^2 z^2 \ , \ 0 \leq z \leq 15\}.$$

Asuma que la densidad del material en el que estamos trabajando es de $2\text{Tons}/m^3$ y que x, y y z estan medidas en metros.

1. ¿Para qué valor del parámetro c ocurre que el momento de inercia del cono E alrededor del eje z tiene valor de 3π?
2. ¿En qué unidades se mide el momento de inercia? Justifique su respuesta mediante la definición de integral triple.

4. Ecuaciones diferenciales.

Recuerde que el **Wronskiano** de una familia de n funciones $f_i : I \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, que son $n-1$-veces diferenciables es dado por

$$W(f_1, \ldots, f_n)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \ldots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}, \qquad x \in I.$$

Considere la ecuación diferencial

$$y''(t) + p(t)\, y'(t) + q(t)\, y(t) = t. \tag{0.1}$$

Demuestre que el Wronskiano de la ecuación homogénea viene dado por:

$$W(y_1, y_2) = t^3, \quad t > 0$$

y que una solución de dicha ecuación homogénea es $y_1 = t$.

5. Álgebra lineal 1.

Sea W el plano en $\mathbb{R}^3$, de ecuación cartesiana $x + y - 2z = 0$.

1. Encontrar una base ortogonal, B_W, para el subespacio W y una base ortogonal, B, para $\mathbb{R}^3$ que extienda a B_W.
2. Sea $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proyección ortogonal sobre W. Encontrar $[P]$, la representación matricial de P
3. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la reflexión con respecto al plano W. Encontrar $[T]$, la representación matricial de T. Puede dejarla indicada como una multiplicación de matrices.
   Ayuda: Encuentre primero $[T]_B$, la matriz asociada a T con respecto a la base B encontrada en el numeral (a) y luego exprese a $[T]$ como una multiplicación de matrices.

6. Probabilidad Básico.
Un dado con 6 caras tenga la probabilidad $p_i = C \cdot i$ para cada cara i, $i = 1, \dots, 6$, y una constante positiva C.

1. Calcular la constante C.
2. El dado se tira 4 veces de manera independiente. ¿Cuál es la probabilidad de tener 5 resultados iguales?
3. Ahora se considera solo el número ocurriencias de la cara 6. El dado se tira 21 veces. ¿Cuál es el valor esperado de esta cantidad? ¿Cuál es la varianza de esta cantidad? Estime con la desigualdad de Chebychev la probabilidad de alejarse por más de 3 del valor esperado.

7. Álgebra abstracta 1.

Sea $G = D_6$ el grupo de simetrías del hexágono.

1. Pruebe que el subconjunto R de rotaciones es un grupo normal.
2. Halle el centro de G.
3. Pruebe que G es soluble.

8. Matemática estructural.
Sea X el conjunto de todas las funciones **inyectivas** $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$. Sea Y el conjunto de **todas** las funciones $f : \mathbb{N} \to \{0, 1, 2\}$.

Demuestre que existe una biyeccion entre X y Y.