

**Departamento de Matemáticas – Universidad de los Andes**

Examen de Admisión al Postgrado — Parte 1

Junio 11 de 2021

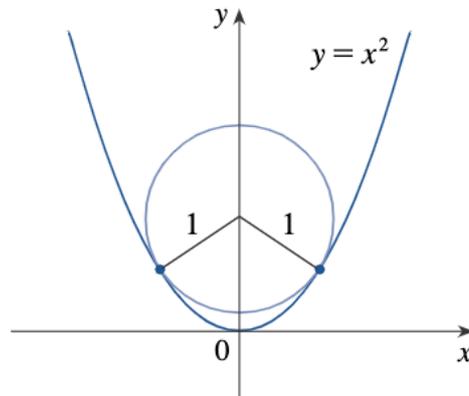
Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Marque todas las hojas con su nombre completo.

Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.

**Tiempo máximo: 180 minutos.**

1. Encuentre el inverso multiplicativo de 35 en  $\mathbb{Z}_{48}$ , donde  $\mathbb{Z}_n$  es el conjunto de números enteros módulo  $n$ .

2. En la figura se muestra una circunferencia de radio 1 inscrita en la parábola  $y = x^2$ . Encuentre las coordenadas del centro de la circunferencia.



3. ¿Para qué valores de  $s$  la siguiente integral converge?

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^s + x}} dx.$$

4. Pruebe que para el campo

$$\vec{F} = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

el rotacional  $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$ , pero el campo no es gradiente (i.e. no existe ninguna función  $U$  tal que  $\vec{F} = \nabla U$ ). Explique el resultado.

5. Sea  $U \subset \mathbb{C}$  abierto,  $a \in U$  y  $r > 0$  tal que  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\} \subset U$ . Sea  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa tal que

$$|f(z)| > |f(a)| \text{ para todo } z \text{ con } |z - a| = r.$$

Muestre que  $f$  tiene un cero en  $D^\circ = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ .

6. Encuentre todas las soluciones del problema

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) - X(0) = 0 \\ X'(\pi) - X(\pi) = 0, \end{cases}$$

considerando los distintos casos para  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

7. Sea  $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$  una base de  $\mathbb{R}^2$  y sean  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  los vectores unitarios estandar en  $\mathbb{R}^2$ . Se sabe que la representación de  $\vec{e}_1$  en la base  $\mathcal{B}$  es  $\begin{pmatrix} \pi \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$  y la de  $\vec{e}_2$  es  $\begin{pmatrix} 1 \\ \pi \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ . Encuentre  $\vec{b}_1$  y  $\vec{b}_2$ .

8. Una urna contiene  $r$  bolas rojas y  $a$  bolas azules. Se escoge al azar una bola de la urna y luego se devuelve a la urna junto con  $d$  bolas más del mismo color de la escogida. Este proceso se repite indefinidamente.

1. Calcule la probabilidad de que la segunda bola que se saca sea azul.
2. Calcule la probabilidad de que la primera bola es azul dado que la segunda también es azul