Departamento de Matemáticas – Universidad de los Andes

Examen de Admisión al Postgrado — Parte 2

Junio 19 de 2020

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Marque todas las hojas con su nombre completo. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.
Tiempo máximo: 180 minutos.

9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y suponga que para cada intervalo abierto en $\mathbb{R}$, su imagen bajo f es un intervalo abierto. Demuestre que f es monóntona.

10. Sea K un campo/cuerpo y V un espacio vectorial sobre K, $V \neq \{0\}$. Sea $f : V \to V$ una transformación lineal nilpotente tal que $f^r = 0$, donde $r \in \mathbb{Z}_{>0}$, pero $f^{r-1} \neq 0$. Para $i = 0, \dots, r$ defina $V_i = \ker(f^i)$ (con $f^0 = id_V$). Demuestre que tenemos la siguiente cadena de inclusiones propias:

$$\{0\} = V_0 < V_1 < \cdots < V_{r-1} < V_r = V.$$

11. Sea $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$ es el conjunto de unidades (elementos con inversas multiplicativas) en el anillo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, considerado como un grupo bajo multiplicación. Considere los siguientes grupos:

$$(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^{\times}, (\mathbb{Z}/32\mathbb{Z})^{\times}, (\mathbb{Z}/34\mathbb{Z})^{\times}, (\mathbb{Z}/40\mathbb{Z})^{\times}, (\mathbb{Z}/48\mathbb{Z})^{\times}.$$

Demuestre que por lo menos dos de ellos son isomorfos. (Ayuda: Verifique que tienen el mismo orden. No es necesario determinar cuál par de grupos son isomorfos.)

12. Sea $\mathbb{S}^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

i. Muestre que $\mathbb{S}^1$ es una subvariedad diferenciable de $\mathbb{R}^2$.

ii. Muestre que el fibrado tangente $T\mathbb{S}^1$ es trivial.

13. Considere el anillo de matrices R dado por

$$R := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \, : \, a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

i. Pruebe que $\varphi : R \to \mathbb{Z}$ donde $\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\right) := a - b$ es un homomorfismo de anillos.

ii. Sea I el ideal de R generado por $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcule R/I y determine si I es un ideal primo y/o maximal de R.

14. En un espacio de probabilidad se definen variables $X_2, X_3, \ldots$, donde cada X_n tiene distribución uniforme en la bola unitaria n-dimensional

$$B_n(\mathbf{0}, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|^2 \leq 1\},$$

siendo $\|x\|$ la norma euclideana de $\mathbb{R}^n$. Por definición de la distribución uniforme, si A es un subconjunto medible de $B_n(\mathbf{0}, 1)$, entonces $\Pr(X_n \in A) = \mathrm{vol}(A)/\mathrm{vol}(B(\mathbf{0}, 1))$, donde "vol" es la medida de Lebesgue n-dimensional. Sea $R_n = \|X_n\|$. Pruebe que $R_n \to 1$, en probabilidad, cuando $n \to \infty$.