Departamento de Matemáticas – Universidad de los Andes

Examen de Admisión al Doctorado — Parte 2

Julio 7 de 2020

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Marque todas las hojas con su nombre completo.
Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.
Tiempo máximo: 180 minutos.

9. Suponga que $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ converge uniformemente a f en $[a,b]$ y

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(u)du$$

existe para toda $x \in [a,b]$.

i. Suponiendo que $F(x) = \int_a^x f(u)du$ también existe para toda $x \in [a,b]$, demuestre que $F_n(x)$ converge uniformemente a $F(x)$ en $[a,b]$.

ii. Bajo las hipótesis del ejercicio, ¿es cierto que $F(x) = \int_a^x f(u)du$ existe?

10. Suponga que $\{0,1\}$ tiene la topología discreta y $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tiene la topología producto.

i. Demuestre que no existe $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ continua biyectiva.

ii. ¿Existe $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ continua sobreyectiva?

iii. ¿Existe $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ continua inyectiva?

11. Sea G un grupo con 120 elementos, y asuma que el número de 2-subgrupos de Sylow es menor que 15. Demuestre que G tiene un subgrupo de índice 3 ó 5.

12. Considere las esferas unitarias $\mathbb{S}^1$ y $\mathbb{S}^2$ (en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente) y defina la siguiente relación de equivalencia en ambas esferas:

$$zRw \Leftrightarrow z = \pm w.$$

i. Muestre que $\mathbb{S}^1/R$ con la topología cociente es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$.

ii. Muestre que $\mathbb{S}^2/R$ con la topología cociente *no* es homeomorfo a $\mathbb{S}^2$.

13.

i. Demuestre que la extensión $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$ es Galois sobre $\mathbb{Q}$.

ii. ¿Es posible que el subgrupo $H = \{e, (1,2), (3,4), (1,2)(3,4)\}$ de S_4 sea el grupo de Galois de un polinomio irreducible sobre $\mathbb{Q}$?

14. En un espacio de probabilidad se definen variables $X_2, X_3, \ldots,$ donde cada X_n tiene distribución uniforme en la bola unitaria n-dimensional

$$B_n(\mathbf{0}, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|^2 \leq 1\},$$

siendo $\|x\|$ la norma euclideana de $\mathbb{R}^n$. Por definición de la distribución uniforme, si A es un subconjunto medible de $B_n(\mathbf{0}, 1)$, entonces $\Pr(X_n \in A) = \mathrm{vol}(A)/\mathrm{vol}(B(\mathbf{0}, 1))$, donde "vol" es la medida de Lebesgue n-dimensional. Sea $R_n = \|X_n\|$. Pruebe que $R_n \to 1$, en probabilidad, cuando $n \to \infty$.